МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова**

Л. Б. Коваленко

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Модуль 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2017**

УДК 51(075)
К56

Рецензенти:

Харченко А. П., кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури;

Щелкунова Л. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано до друку
Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник
(протокол № 13 від 2 червня 2017 р.)

Коваленко Л. Б.

К56 Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с.

ISBN 978-966-695-428-5

У навчальному посібнику представлено індивідуальні завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів з п'яти розділів вищої математики. У кожному розділі представлені методичні вказівки до розв'язання типових варіантів. Усі завдання представлені в 30 варіантах, що дає можливість проводити якісну підготовку до занять та перевірку отриманих знань та навичок у групах різної наповненості.

Мета посібника – допомогти студентам будівельних спеціальностей під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу вищої математики.

УДК 51(075)

ISBN 978-966-695-428-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Представлений «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2» у сукупності з виданими навчальними посібниками «Вища математика. Модуль 1» (авт. – Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський) – Харків : ХНАМГ, 2015; «Вища математика. Модуль 2» (авт. – Л. Б. Коваленко) – Х.: ХНАМГ, 2017; «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1» (авт. – Л.Б. Коваленко, С.О. Станішевський) – Харків : ХНАМГ, 2015, утворюють навчально-методичний комплекс з курсу «Вища математика» для студентів 1 курсу освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія.

Збірник містить 5 розділів, в кожному з яких за темами представлено задачі в 30 варіантах. Саме така кількість варіантів обрана з огляду на те, що наповненість навчальних груп, зазвичай, не перебільшує 30 осіб. Викладач має можливість запропонувати ці завдання як контрольні або самостійні наприкінці кожної з тем для контролю рівня засвоювання вивченого матеріалу. Автори навмисно відійшли від поширеної зараз практики, коли читачеві відразу пропонують варіанти відповідей, одна з яких – правильна. На наш погляд, це звужує саме поняття тесту («test» – перевірка, випробування), зводячи його до спроби «вгадати» правильну відповідь. Саме тому у процесі підготовки тестових завдань автори віддали перевагу відкритій формі, коли тестуємий сам отримує правильну відповідь у вигляді довільного числа (або виразу), що допускає, зокрема, й комп’ютерне тестування.

На початку кожного розділу приведено приклад розв’язання типового варіанту з посиланням на формули, розділи, сторінки навчального посібника «Вища математика. Модуль 2».

Автори сподіваються, що запропонований «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2» дасть змогу підвищити якість навчання та рівень освіти, та стане до нагоди як студентам, так і викладачам.

Тема 10 «Комплексні числа»

Тема присвячена комплексним числам. Запропоновані завдання дадуть змогу читачеві познайомитися з різними формами запису комплексних чисел, алгебраїчними діями над ними. За відповідним теоретичним матеріалом звертайтеся до розділу 7 посібника «Вища математика. Модуль 2».

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Побудувати комплексне число $z = -6 + 8i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

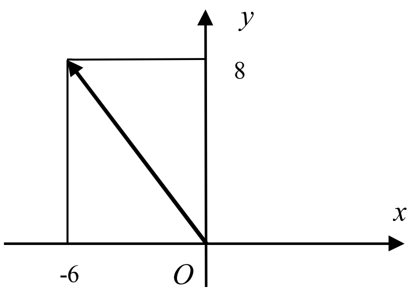

Рисунок10.1.

Розв'язання. Побудуємо комплексне число (рис. 1). Його дійсна частина $a = -6$, а уявна $b = 8$. Відрізки довжиною -6 та 8 відкладаємо на осях абсцис та ординат відповідно.

Модуль обчислимо за формулою

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Знайдемо аргумент за формулою:

$$Argz = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{-6}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Тригонометрична форма комплексного числа (за формулою (7.6)) має вигляд:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$$= 10\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right) =$$
$$= 10\left(-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right),$$

а показникова (за формулою (7.12)) відповідно:

$$z = re^{i\varphi} = 10e^{i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$$

За визначенням 7.10 комплексно спряжене число має ту саму дійсну частину, а уявну таку саму за величиною, але оберненого знаку: $\bar{z} = -6 - 8i$.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 - 5i$ і $z_2 = 4 + 6i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

Розв'язання. ***Суму*** знайдемо за формулою (7.2):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (3 + 4) + (-5 + 6)i = 7 + i;$$
$$|z_1 + z_2| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

різницю – за формулою (7.3):

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) =$$
$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = (3 - 4) + (-5 - 6)i = -1 - 11i;$$
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{122};$$

добуток – за формулою (7.4):

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i =$$
$$= (3 \cdot 4 - (-5) \cdot 6) + \left(3 \cdot 6 + 4 \cdot (-5)\right)i = 42 - 2i;$$
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{42^2 + (-2)^2} = \sqrt{1764} = 2\sqrt{442};$$

частку – за формулою (7.5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i =$$
$$= \frac{3\cdot 4 + (-5)\cdot 6}{4^2 + 6^2} + \frac{4\cdot(-5) - 3\cdot 6}{4^2 + 6^2}i = -\frac{18}{52} - \frac{38}{52}i = -\frac{9}{26} - \frac{19}{26}i;$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{9}{26}\right)^2 + \left(-\frac{19}{26}\right)^2} = \frac{\sqrt{442}}{26}.$$

3. Обчислити $\left(5+5\sqrt{3}i\right)^4$.

Розв'язання. Представимо комплексне число у тригонометричній формі:

$$r=|z|=\sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=10;$$

$$Argz=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{5}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3};$$

запишемо комплексне число як

$$z=10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Обчислимо четвертий степінь заданого комплексного числа за формулою Муара (7.16):

$$\left(5+5\sqrt{3}i\right)^4=10^4\left(\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=10000\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=1000\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-1000\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-10000\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

$$=-5000\left(1+\sqrt{3}i\right).$$

4. Знайти корені рівняння $z^6+262144=0$.

Розв'язання: $z^6=-262144$ або $z=\sqrt[6]{-262144}$. Представимо число -262144 в тригонометричній формі. Для цього обчислимо модуль та аргумент числа -262144:

$$r=|z|=\sqrt{(-262144)^2+0^2}=262144;$$

$$Argz=\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-262144}\right)=\operatorname{arctg}0=\pi;$$

отже

$$-262144=262144(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Скористаємося формулою (7.17):

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{262144}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right),\text{ де } k=0,1,2,3,4,5.$$

Підставляючи послідовно значення k в отриманий вираз, знайдемо всі шість коренів рівняння:

$z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} + 4i = 4(\sqrt{3} + i);$

$z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 8 \cdot i = 8i;$

$z_3 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3} + 4i = 4(-\sqrt{3} + i);$

$z_4 = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3} - 4i = -4(\sqrt{3} + i);$

$z_5 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 8 \cdot i = -8i;$

$z_6 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3} - 4i = -4(\sqrt{3} + i).$

Завдання 10.1

1. Побудувати комплексне число $z = 3 + 4i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 4 - 3i$ і $z_2 = 5 + 6i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(2 - 2i)^4$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 64 = 0$.

Завдання 10.2

1. Побудувати комплексне число $z = 3 - 4i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 2 + i$ і $z_2 = 7 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 4 = 0$.

Завдання 10.3

1. Побудувати комплексне число $z = -8 + 6i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 9 + i$ і $z_2 = 4 - 3i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{5} - \sqrt{15}i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 64 = 0$.

Завдання 10.4

1. Побудувати комплексне число $z = 12 + 5i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 7 - 8i$ і $z_2 = 3 - 2i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(4 - 4i)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^2 + 144 = 0$.

Завдання 10.5

1. Побудувати комплексне число $z = 6 - 8i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 13 + 2i$ і $z_2 = -5 - 7i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(5 - \sqrt{75}i\right)^4$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 128 = 0$.

Завдання 10.6

1. Побудувати комплексне число $z = -3 - i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 14 + 5i$ і $z_2 = 2 - 7i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(5 + 5i)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 81 = 0$.

Завдання 10.7

1. Побудувати комплексне число $z = 7 + i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 6 - 3i$ і $z_2 = 5 + 9i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(-3 + 3i)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 729 = 0$.

Завдання 10.8

1. Побудувати комплексне число $z = 9 - i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 13 + 5i$ і $z_2 = 8 + 4i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{21} - \sqrt{7}i\right)^4$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 15625 = 0$.

Завдання 10.9

1. Побудувати комплексне число $z = 12 - 5i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 - 8i$ і $z_2 = 5 + 2i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(6 + 6i)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 2401 = 0$.

Завдання 10.10

1. Побудувати комплексне число $z = -8 - 6i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 - 9i$ і $z_2 = -5 + 3i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{12} + 2i\right)^{12}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 1296 = 0$.

Завдання 10.11

1. Побудувати комплексне число $z = 7 - 3i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 15 + i$ і $z_2 = 2 - 9i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(i + 1)^{14}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 16 = 0$.

Завдання 10.12

1. Побудувати комплексне число $z = -9 - 5i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 + 8i$ і $z_2 = 7 - 2i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(9 + 9i)^2$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 625 = 0$.

Завдання 10.13

1. Побудувати комплексне число $z = 9 - 8i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 14 + 3i$ і $z_2 = 2 - 6i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 6561 = 0$.

Завдання 10.14

1. Побудувати комплексне число $z = 7 + 4i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 5 + 2i$ і $z_2 = -9 - 11i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 14641 = 0$.

Завдання 10.15

1. Побудувати комплексне число $z = 7 - 9i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 13 + 6i$ і $z_2 = 5 + i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(4 + 4i)^{12}$.

4. Знайти корені рівняння $z^8 + 390625 = 0$.

Завдання 10.16

1. Побудувати комплексне число $z = 4 + i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 10 - 7i$ і $z_2 = -2 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 2401 = 0$.

Завдання 10.17

1. Побудувати комплексне число $z = -6 - 8i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 7 + 5i$ і $z_2 = 8 + 3i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(9 - 3\sqrt{3}i\right)^{4}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 625 = 0$.

Завдання 10.18

1. Побудувати комплексне число $z = -12 - 5i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 11 - 2i$ і $z_2 = 3 + 8i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(3 + \sqrt{3}i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 46656 = 0$.

Завдання 10.19

1. Побудувати комплексне число $z = 4 - 3i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 1 - 11i$ і $z_2 = 2 + 9i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{21} + \sqrt{7}i\right)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 4096 = 0$.

Завдання 10.20

1. Побудувати комплексне число $z = 5 + 7i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 + 2i$ і $z_2 = -5 - 12i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{5} - \sqrt{15}i\right)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 6561 = 0$.

Завдання 10.21

1. Побудувати комплексне число $z = 8 - 7i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = -1 + 15i$ і $z_2 = 4 + 3i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{24} + 2\sqrt{2}i\right)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 1 = 0$.

Завдання 10.22

1. Побудувати комплексне число $z = 3 - 12i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 5 + 2i$ і $z_2 = 13 - 4i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{18} + \sqrt{6}i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^8 + 256 = 0$.

Завдання 10.23

1. Побудувати комплексне число $z = 14 - 3i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 5 + i$ і $z_2 = -2 - 7i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(8\sqrt{3} - 8i\right)^4$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 729 = 0$.

Завдання 10.24

1. Побудувати комплексне число $z = 3 + 8i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 11 - 7i$ і $z_2 = 7 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(\sqrt{12} - 6i\right)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 28561 = 0$.

Завдання 10.25

1. Побудувати комплексне число $z = 9 + 5i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 7 - 8i$ і $z_2 = 4 + 3i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(-4\sqrt{3} + 4i\right)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 64 = 0$.

Завдання 10.26

1. Побудувати комплексне число $z = 13 - 4i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 6 + 7i$ і $z_2 = 2 + 4i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(9 - 3\sqrt{3}i\right)^{10}$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 625 = 0$.

Завдання 10.27

1. Побудувати комплексне число $z = 4 - 15i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 + 13i$ і $z_2 = -2 - 7i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(3\sqrt{3} + 9i\right)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 64 = 0$.

Завдання 10.28

1. Побудувати комплексне число $z = 4 + 7i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = -8 + i$ і $z_2 = 12 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $\left(-5 - 5\sqrt{3}i\right)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 16 = 0$.

Завдання 10.29

1. Побудувати комплексне число $z = 9 - 4i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 8 - 3i$ і $z_2 = 6 - 4i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(-8 + 8i)^8$.

4. Знайти корені рівняння $z^6 + 64 = 0$.

Завдання 10.30

1. Побудувати комплексне число $z = 10 - 2i$, знайти модуль та аргумент. Записати його в тригонометричній та показниковій формах. Знайти комплексне спряжене до нього число.

2. Знайти суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 3 + 7i$ і $z_2 = 4 - 11i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

3. Обчислити $(-9 - 9i)^6$.

4. Знайти корені рівняння $z^4 + 81 = 0$.

Тема 11 «Невизначений інтеграл»

У цьому розділі ми ознайомимося з невизначеними інтегралами. Запропоновані завдання дадуть змогу читачеві засвоїти на практиці головні прийоми інтегрування, а саме: безпосереднє знаходження первісних за таблицею невизначених інтегралів, метод заміни змінної, інтегрування частинами…

Зрозуміло, що найважливішим інструментом в розв'язанні цих задач є таблиця невизначених інтегралів та головні властивості невизначених інтегралів. Метод заміни змінної переконає нас в необхідності пам'ятати таблицю похідних. Для полегшення роботи над наступним завданням, радимо мати під рукою обидві ці таблиці (похідних та невизначених інтегралів). За відповідним теоретичним матеріалом звертайтеся до розділів 8.1 - 8.8 посібника «Вища математика. Модуль 2».

Приклади розв'язання типового варіанта

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^5}-x^2}{x^3}dx.$

Розв'язання: Маємо степеневу функцію. Для безпосереднього інтегрування спростимо підінтегральну функцію, скориставшись властивостями степенів:

$$\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^5}-x^2}{x^3}dx = \int\left(3x^4+4x^{-\frac{7}{4}}-\frac{1}{x}\right)dx = 3\int x^4dx +$$

$$+4\int x^{-\frac{7}{4}}dx - \int\frac{dx}{x} = 3\frac{x^5}{5}+4\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}}-\ln|x|+C =$$

$$=\frac{3}{5}x^5-\frac{16}{3\sqrt[4]{x^3}}-\ln|x|+C.$$

2. $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-5\sin x+4^x\right)dx.$

Розв'язання. Інтеграли табличні. Щоб скористатися таблицею, за властивістю лінійності (8.2) і (8.3) розіб'ємо інтеграл на три:

$$\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-5\sin x+4^x\right)dx=6\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\sin x\,dx+\int 4^x\,dx=$$
$$=3\sqrt{x}+5\cos x+\frac{4^x}{\ln 4}+C.$$

3. $\int\frac{dx}{13x+4}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної можемо скористатися або властивістю (8.6) невизначних інтегралів, або звернутися до методу заміни змінної. Ми розв'яжемо за методом заміни змінної (8.7):

$$\int\frac{dx}{13x+4}=\begin{bmatrix}u=13x+4\\ du=13\,dx\\ dx=\frac{1}{13}du\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{13}\ln|u|+C=$$
$$=\frac{1}{13}\ln|13x+4|+C.$$

4. $\int\cos(2x-1)\,dx$.

Розв'язання. За методом заміни змінної маємо:

$$\int\cos(2x-1)\,dx=\begin{bmatrix}u=2x-1\\ du=2\,dx\\ dx=\frac{1}{2}du\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u+C=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C.$$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}}$.

Розв'язання. Знову скористаємося методом заміни змінної:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}}=\begin{bmatrix}u=7x-9\\ du=7\,dx\\ dx=\frac{1}{7}du\end{bmatrix}=\int u^{-\frac{3}{5}}du=\frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+C=$$
$$=\frac{5}{2}\sqrt[5]{(7x-9)^2}+C.$$

Зауважимо, що в прикладах 3 – 5 у разі заміни змінної у функціях, аргумент яких лінійний відносно незалежної змінної, за знак інтегралу виходить коефіцієнт, обернений коефіцієнту при x, що цілком відповідає властивості (8.6). Запам'ятав це, надалі ми не будемо звертатися до заміни змінної в таких простих випадках, а будемо користуватися згаданою властивістю.

6. $\int \frac{\text{arcctg}^4 5x}{1+25x^2} dx$.

Розв'язання. Інтеграл не табличний. Звернувшись до таблиці похідних, бачимо, що в підінтегральному виразі присутній диференціал арккотангенса. Саме це для нас є підказкою при заміні змінної:

$$\int \frac{\text{arcctg}^4 5x}{1+25x^2} dx = \begin{bmatrix} u = \text{arcctg} 5x \\ du = -\frac{5dx}{1+25x^2} \\ \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5} du \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \int u^4 du = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{5} + C =$$
$$= -\frac{1}{25} \text{arcctg}^5 5x + C.$$

7. $\int \frac{e^{\text{tg}4x} dx}{\cos^2 4x}$.

Розв'язання. Інтеграл не табличний. Підказку щодо заміни нам знову дає таблиця похідних – в підінтегральному виразі ми знаходимо (з точністю до коефіцієнта) диференціал тангенса:

$$\int \frac{e^{\text{tg}4x} dx}{\cos^2 4x} = \begin{bmatrix} u = \text{tg} 4x \\ du = \frac{4dx}{\cos^2 4x} \\ \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4} du \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{\text{tg}4x} + C.$$

8. $\int \frac{dx}{(3x-5)\ln^6(3x-5)}$.

Розв'язання. У підінтегральному виразі ми знаходимо диференціал логарифма, тому заміна змінної очевидна:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)\ln^6(3x-5)} = \begin{bmatrix} u = \ln(3x-5) \\ du = \frac{3}{3x-5}dx \\ \frac{dx}{3x-5} = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^6} = \frac{1}{3}\int u^{-6}du =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{15u^5} + C = -\frac{1}{15\ln^5(3x-5)} + C.$$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-2}$.

Розв'язання. Настав час ознайомитися з чотирма формулами наприкінці нашої таблиці інтегралів, які містять квадратичні вирази. Формули для нас принципові, оскільки нам прийдеться звертатися до них під час інтегрування більш складніших функцій.

$$\int \frac{dx}{9x^2-2} = \begin{bmatrix} u^2 = 9x^2 \\ u = 3x \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{2}}{3x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}}$.

Розв'язання. Інтегрування проводимо аналогічно попередньому прикладу. Тільки звернутися буде необхідно до іншої формули:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}} = \begin{bmatrix} u^2 = 8x^2 \\ u = 2\sqrt{2}x \\ du = 2\sqrt{2}dx \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}du \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C.$$

11. $\int \frac{x\,dx}{3x^2+1}$.

Розв'язання. Звернутися до згаданих формул у разі інтегрування цієї функції не можна, оскільки в чисельнику присутній x. Помічаємо, що в знаменнику – многочлен другого степеня, а в чисельнику – першого. Під час диференціювання многочлена другого степеня отримаємо многочлен першого. Отже, заміна змінної стає очевидною:

$$\int \frac{x\,dx}{3x^2+1} = \begin{bmatrix} u = 3x^2+1 \\ du = 6x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{6}du \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|3x^2+1| + C.$$

12. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+1}}dx.$

Розв'язання. Під час розв'язання цього прикладу звернемося до розглянутих прикладів 9 – 11. Поділимо чисельник на знаменник, розіб'ємо інтеграл на два, методи інтегрування кожного з яких нам вже відомі. Щоб запис був зрозумілішим, ми кожну з первісних знайдемо окремо, а результат отримаємо як суму:

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+1}}dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \begin{bmatrix} u = 4x^2+1 \\ du = 8xdx \\ xdx = \frac{1}{8}du \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{u} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + C;$$

$$I_2 = -7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \begin{bmatrix} u^2 = 4x^2 \\ u = 2x \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} = -\frac{7}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= -\frac{7}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C = -\frac{7}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2+1}\right| + C;$$

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} - \frac{7}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2+1}\right| + C.$$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$.

Розв'язання. У знаменнику підінтегральної функції – квадратний тричлен. Для інтегрування таких виразів (див. п. 8.4.1) необхідно виділити повний квадрат:

$$x^2-4x+9=(x^2-4x+4)-4+9=(x-2)^2+5.$$

Підставимо в підінтегральний вираз виділений повний квадрат, бачимо, що відповідною заміною, інтеграл зводиться до табличного:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+9}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+5}=\begin{bmatrix} u=x-2 \\ du=dx \end{bmatrix}=\int \frac{du}{u^2+5}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C.$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}$.

Розв'язання. Метод інтегрування – аналогічний попередньому розглянутому прикладу:

$$3x^2+x-2=\left(3x^2+2\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{12}-2=$$
$$=\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{25}{12};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x-2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{25}{12}}}=\begin{bmatrix} u=\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ du=\sqrt{3}dx \\ dx=\frac{1}{\sqrt{3}}du \end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{25}{12}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-\frac{25}{12}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{25}{12}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2+x-2}\right|+C.$$

15. $\int \frac{x-4}{x^2-6x-2}dx.$

Розв'язання. Метод інтегрування таких виразів докладно розглянуто у п. 8.4.2. Проілюструємо його на прикладі. Звернемо увагу, що в чисельнику – многочлен першого степеня, а в знаменнику – другого. Диференціал многочлена другого степеня є многочлен першого степеня. Тому зрозуміло, що з точністю до коефіцієнтів ми маємо в чисельнику диференціал знаменника. Оцінимо диференціал знаменника:

$$d(x^2-6x-2)=(2x-6)dx.$$

Спробуємо його отримати в чисельнику. Спочатку підберемо коефіцієнт при x, а потім – при вільному члені:

$\int \frac{x-4}{x^2-6x-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-6x-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)+6-8}{x^2-6x-2}dx =$

Отриманий інтеграл доцільно розбити на два, методи інтегрування кожного з яких нам вже відомі:

$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} - \frac{8}{2}\int \frac{dx}{x^2-6x-2} = I_1 + I_2;$

$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} = \begin{bmatrix} u = x^2-6x-2 \\ du = (2x-6)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x-2| + C;$

$I_2 = -4\int \frac{dx}{x^2-6x-2} = -4\int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9-2} = -4\int \frac{dx}{(x-3)^2-11} =$

$= \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{bmatrix} = -4\int \frac{du}{u^2-11} = -4\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{11}}{u+\sqrt{11}}\right| + C =$

$= -\frac{2}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}}\right| + C.$

Остаточно маємо:

$I = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x-2| - \frac{2}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}}\right| + C.$

16. $\int \frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx.$

Розв'язання. Алгоритм розв'язання аналогічний розглянутому у попередньому прикладі. Оцінимо диференціал підкорневого виразу:

$$d(3-2x-2x^2)=(-2-4x)dx.$$

Спробуємо отримати його в чисельнику. Підібрати дробовий коефіцієнт не завжди зручно, через що у разі потреби радимо читачеві спочатку отримати при x коефіцієнт, який би дорівнював одиниці (для цього винесемо заданий коефіцієнт за дужки), а далі працювати як і в попередньому прикладі:

$$\int\frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx=5\int\frac{x+\frac{4}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx=-\frac{5}{4}\int\frac{-4x-\frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx=$$
$$=-\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)+2-\frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}}dx=-\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}}+\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}}=$$
$$=I_1+I_2;$$

$$I_1=-\frac{5}{4}\int\frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}}=\begin{bmatrix}u=3-2x-2x^2\\ du=(-4x-2)dx\end{bmatrix}=-\frac{5}{4}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=$$
$$=-\frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{u}+C=-\frac{5}{2}\sqrt{3-2x-2x^2}+C;$$

$$I_2=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-(2x^2+2x-3)}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{3+\frac{1}{2}-\left(2x^2+2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)}}=$$
$$=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{2}-\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\begin{bmatrix}u=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ du=\sqrt{2}dx\\ dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du\end{bmatrix}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{7}{2}-u^2}}=$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{u}{\sqrt{\frac{7}{2}}}+C=\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}+C=$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Остаточно маємо

$$I=-\frac{5}{2}\sqrt{3-2x-2x^2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

17. $\int\frac{2x^3+6x-3}{x+4}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний дріб, дріб неправильний, оскільки максимальний степінь чисельника перевищує максимальний степінь знаменника.

Перед інтегруванням необхідно виділити цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2+6x-3 & x+4 \\
\underline{2x^3+8x^2} & 2x^2-8x+38 \\
-8x^2+6x & \\
\underline{-8x^2-32x} & \\
38x-3 & \\
\underline{38x+152} & \\
-155 &
\end{array}
$$

Цей інтеграл набуває такого вигляду:

$$\int \frac{2x^3+6x-3}{x+4}dx = \int \left(2x^2-8x+38-\frac{155}{x+4}\right)dx =$$

$$= 2\int x^2\,dx - 8\int x\,dx + 38\int dx - 155\int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 38x - 155\ln|x+4| + C.$$

18. $\int \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того, щоб з'ясувати, якого він типу, ми повинні знайти корені знаменника. Один із коренів – $x=-2$, ми бачимо відразу, два других можемо знайти, наприклад, за теоремою Вієта (або знайти корені квадратного рівняння через дискримінант): $x=1,\ x=5$. Усі три корені знаменника дійсні та різні. Отже складний дріб може бути розкладений на три простіших (8.12):

$$\frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)} = \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Для цього приведемо дробі до спільного знаменника та дорівняємо чисельники:

$$4x^2-x-39 = A(x-1)(x-5) + B(x+2)(x-5) + C(x-1)(x+2);$$

Підставляючи по черзі корені знаменника, ми відразу знаходимо невідомі коефіцієнти:

$x=-2$: $\quad 16+2-39=21A;\quad -21=21A;\quad A=-1;$

$x=1$: $\quad 4-1-39=-12B;\quad -36=-12B;\quad B=3;$

$x=5$: $\quad 100-5-39=28C;\quad 56=28C;\quad C=2.$

Отже, переписавши підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\int \frac{4x^2-x-39}{(x+2)(x^2-6x+5)}dx = -\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-5} =$$
$$= -\ln|x+2| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x-5| + C.$$

19. $\int \frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Корені знаменника: $x=0$ і $x=-6$. Корінь $x=0$ – кратний, його кратність дорівнює 2. Тому відповідно до (8.14) розкладання нашого дробу на простіші має такий вигляд:

$$\frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+6}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Приведемо дробі до спільного знаменника, дорівняємо чисельники:

$$2x^2 - x + 30 = A(x+6) + Bx(x+6) + Cx^2.$$

Як і в попередньому прикладі ми зможемо обчислити відразу два з трьох невідомих коефіцієнтів:

$x=0$: $30 = 6A$; $A = 5$;

$x=-6$: $108 = 36C$; $C = 3$.

Щоб знайти третій, припустимося до «хитрощів»: підставимо в тотожність будь-яке значення x, наприклад $x=1$, отримаємо вираз, який містить усі три коефіцієнти; підставимо два відомих та виразимо через них третій:

$x=1$: $31 = 7A + 7B + C$; $31 = 35 + 7B + 3$; $B = -1$.

Отже, переписав підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\int \frac{2x^2-x+30}{x^2(x+6)}dx = 5\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x+6} =$$
$$= -\frac{5}{x} - \ln|x| + 3\ln|x+6| + C.$$

20. $\int \frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того, щоб знайти корені знаменника, спробуємо перетворити многочлен:

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4).$$

Отже, знаменник має один дійсний корінь $x=1$ та пару комплексних (оскільки $x^2+4\neq 0$ в дійсній області). Згідно з (8.16) розкладання дробі на простіші має вигляд:

$$\frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4}=\frac{4x^2-x+12}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника, дорівняємо чисельники:

$$4x^2-x+12=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1).$$

Тільки один з коефіцієнтів ми можемо знайти відразу:

$x=1$: $\quad 15=5A$; $\quad A=3$.

Щоб знайти два інших, розкриємо дужки в нашій тотожності, та за методом невизначених коефіцієнтів дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$4x^2-x+12=Ax^2+4A+Bx^2-Bx+Cx-C$;

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 4=A+B \\ x^1 & -1=-B+C. \\ x^0 & 12=4A-C \end{array}$$

Ми отримали систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Ми можемо її не розв'язувати, а підставити в перше та третє рівняння системи відомий нам коефіцієнт A, й знайти невідомі B та C:

$4=3+B$; $\quad B=1$;

$12=12-C$; $\quad C=0$.

Отже, інтеграл набуває вигляду суми двох інтегралів, кожний з яких ми вже навчились знаходити за попередніми прикладами:

$$\int\frac{4x^2-x+12}{x^3-x^2+4x-4}dx=3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=3\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}=$$

$$=3\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=$$

$$=3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C.$$

21. $\int x\sin(3x-1)\,dx$.

Розв'язання. Інтегрування таких функцій проводиться частинами. Нагадаємо формулу (8.17):

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$\int x\sin(3x-1)\,dx=\begin{bmatrix} u=x \\ dv=\sin(3x-1)\,dx \\ du=dx \\ v=-\frac{1}{3}\cos(3x-1)\end{bmatrix}=$$
$$=-\frac{1}{3}x\cos(3x-1)+\frac{1}{3}\int\cos(3x-1)\,dx=$$
$$=-\frac{1}{3}x\cos(3x-1)+\frac{1}{9}\sin(3x-1)+C.$$

22. $\int x^2e^{4x}dx.$

Розв'язання. Інтегрувати частинами таку функцію будемо двічі (див. зауваження на стор. 42):

$$\int x^2e^{4x}dx=\begin{bmatrix} u=x^2 \\ dv=e^{4x}dx \\ du=2xdx \\ v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{4}\cdot 2\int xe^{4x}dx=$$
$$=\begin{bmatrix} u=x \\ dv=e^{4x}dx \\ du=dx \\ v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx\right)=$$
$$=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{8}xe^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+C.$$

23. $\int\ln(x+7)\,dx.$

Розв'язання. Первісна такої функції також знаходиться інтегруванням частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv:

$$\int\ln(x+7)\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln(x+7) \\ dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x+7} \\ v=x\end{bmatrix}=x\ln(x+7)-\int\frac{xdx}{x+7}=$$

отримали неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину і знайдемо первісну:

$$=x\ln(x+7)-\int\frac{(x+7)-7}{x+7}dx=x\ln(x+7)-\int dx+7\int\frac{dx}{x+7}=$$
$$=\ x\ln(x+7)-x+7\ln(x+7)+C.$$

24. $\int \arccos 8x\, dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv:

$$\int \arccos 8x\, dx = \begin{bmatrix} u = \arccos 8x \\ dv = dx \\ du = -\frac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}} \\ v = x \end{bmatrix} = x \arccos 8x + 8\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-64x^2}} =$$

за відомою нам заміною маємо:

$$= x \arccos 8x + \frac{8}{(-128)}\int \frac{-128x\, dx}{\sqrt{1-64x^2}} = x \arccos 8x - \frac{1}{16}\int \frac{d(1-64x^2)}{\sqrt{1-64x^2}} =$$

$$= x \arccos 8x - \frac{1}{8}\sqrt{1-64x^2} + C.$$

25. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv:

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \begin{bmatrix} u = (\arcsin x)^2 & du = \frac{2\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot (\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \arcsin x & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} & v = -2\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C.$$

26. $\int e^{3x} \cos 2x\, dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv, обираючи будь-який із двох способів:

$$\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 2x\, dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx =$

бачимо, за структурою ми отримали аналогічний інтеграл, знов інтегруємо частинами, тепер у процесі розбиття на частини звертаємо увагу на обраний нами спосіб:

$$= \begin{bmatrix} u = e^{3x} & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \sin 2x\,dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx.$

Бачимо, що повернулися до попереднього інтегралу, саме тому вони називаються «поворотними» інтегралами. Нам залишилося розв’язати лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Для цього зробимо заміну

$$I = \int e^{3x}\cos 2x\,dx;$$

та підставимо в наш вираз. Ми дійсно отримали лінійне рівняння відносно шуканого I. Розв’яжемо його:

$I = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}I;$
$\frac{13}{4}I = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x.$
Остаточно маємо

$$I = \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + C.$$

27. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 2}$.

Розв’язання. Для інтегрування такого класу функцій необхідно звернутися до універсальної тригонометричної підстановки (8.18):

$$\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+2}=\begin{bmatrix} u=\mathrm{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx=\frac{2du}{1+u^2} \end{bmatrix}=\int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2}=$$

$$=2\int \frac{du}{3-3u^2+2u+2+2u^2}=-2\int \frac{du}{u^2-2u-5}=$$

в квадратному тричлені виділимо повний квадрат:

$$=-2\int \frac{du}{(u^2-2u+1)-1-5}=-2\int \frac{du}{(u-1)^2-6}=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1-\sqrt{6}}{u-1+\sqrt{6}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{6}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{6}}\right|+C.$$

28. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x}$.

Розв'язання. Для інтегрування функцій з парними степенями синуса та косинуса раціональною є підстановка (8.21), (8.22). Скористаємося цією підстановкою:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x}=\begin{bmatrix} u=\mathrm{tg}x \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+u^2} \\ \sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2} \\ dx=\frac{du}{1+u^2} \end{bmatrix}=\int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1}{1+u^2}-\frac{3u^2}{1+u^2}}=-\int \frac{du}{3u^2-1}=$$

$$=-\int \frac{du}{\left(\sqrt{3}u\right)^2-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}u-1}{\sqrt{3}u-1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}x-1}{\sqrt{3}\mathrm{tg}x-1}\right|+C.$$

29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+12}}dx$.

Розв'язання. Перейти під час інтегрування від тригонометричних функцій до степеневих у цьому прикладі, можна за допомогою підстановки (8.19):

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+12}}dx=\begin{bmatrix} u=\sin x+12 \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix}=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C=$$

$= 2\sqrt{\sin x + 12} + C.$

30. $\int \cos^8 x \sin^3 x\, dx.$

Розв'язання. Інтегрування добутку синуса на косинус у випадку, якщо одна з функцій в непарній степені, проводиться за допомогою однієї з підстановок (8.23) та (8.24) залежно від того, яка з функцій у непарній степені. У нашому випадку в непарній степені синус, тому обираємо заміну (8.23):

$$\int \cos^8 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^8 x \sin^2 x \sin x\, dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2 \end{bmatrix} = -\int u^8(1-u^2)du =$$
$$= -\int (u^8 - u^{10})du = -\frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{11}u^{11} + C =$$
$$= -\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{1}{11}\cos^{11} x + C.$$

31. $\int \sin^4 3x\, dx.$

Розв'язання. Інтегрування парних степенів синусу та косинусу проводиться за допомогою формул зниження степенів (8.25):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$\int \sin^4 3x\, dx = \int (\sin^2 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 6x)\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x)dx = \frac{1}{4}\int dx -$$
$$-\frac{1}{4}\cdot 2\int \cos 6x\, dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1 + \cos 12x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\cos 12x + C =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\cos 12x + C.$$

32. $\int \cos 9x \cos 2x\, dx.$

Розв'язання. Перед інтегруванням цієї функції згадаємо формули перетворення добутку в суму (8.26) та скористаємося ними:

$$\int \cos 9x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(9x-2x)+\cos(9x+2x))dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos 7x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 11x\, dx =$$
$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{22}\sin 11x + C.$$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція містить ірраціональність. Щоб позбутися її, скористаємося підстановкою (8.27). Квадратний корінь зникне, якщо підкорений вираз замінити новою змінною у квадраті:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4} = \begin{bmatrix} x+1=u^2 \\ dx = 2u\,du \end{bmatrix} = \int \frac{2u\,du}{u+4} = 2\int \frac{(u+4)-4}{u+4}du =$$
$$= 2\int du - 8\int \frac{du}{u+4} = 2u - 8\ln|u+4| + C =$$
$$= 2\sqrt{x+1} - 8\ln\left|\sqrt{x+1}+4\right| + C.$$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, підінтегральна функція містить ірраціональність. Але щоб позбутися її, необхідно нову змінну підвести до степеня, який дорівнює найменшому спільному кратному знаменників показників степенів. У нас є корінь квадратний та корінь кубічний: НОК(2,3)=6. Отже, нову змінну потрібно підвести в шосту степінь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)} = \begin{bmatrix} x = u^6 \\ dx = 6u^5 du \end{bmatrix} = \int \frac{6u^5 du}{u^3(u^2+4)} = 6\int \frac{u^2 du}{u^2+4} =$$
$$= 6\int \frac{(u^2+4)-4}{u^2+4}du = 6\int du - 24\int \frac{du}{u^2+4} =$$
$$= 6u - \frac{24}{2}\mathrm{arctg}\frac{u}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3}dx.$

Розв'язання. У процесі інтегрування функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками (8.28) – (8.30). У цьому інтегралі ірраціональність вигляду (8.29), тому приведемо інтеграл до вигляду:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3}dx = \begin{bmatrix} x = \frac{\sqrt{5}}{\sin t} \\ dx = -\frac{\sqrt{5}\cos t\, dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\frac{\cos t}{\sin t} \end{bmatrix} = -\int \frac{\sqrt{5}\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\sqrt{5}\cos t\, dt}{\sin^2 t}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{\sin t}\right)^3} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \cos^2 t\, dt = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(t+\sin t\cdot\cos t)+C.$$

Якщо з підстановки виразити $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{x}$ та $\cos t = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$ остаточно маємо:

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\right)+C.$$

36. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

Розв'язання. У процесі інтегрування функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками (8.28) – (8.30). У цьому інтегралі ірраціональність вигляду (8.28), тому приведемо інтеграл до вигляду:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{bmatrix} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\mathrm{ctg} t - t + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

37. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx.$

Розв'язання. У процесі інтегрування функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками (8.28) – (8.30). У ць ому інтегралі ірраціональність вигляду (8.30), тому приведемо інтеграл до вигляду:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx = \left[\begin{array}{c} x = 3\operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3\,dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{3}{\cos t} \cdot \frac{3\,dt}{\cos^2 t}}{3\operatorname{tg} t} = 3\int \frac{dt}{\sin t \cdot \cos^2 t} =$$

скористаємося в чисельнику основною тригонометричною тотожністю та розіб'ємо інтеграл на два:

$$= 3\int \frac{\cos^2 t + sin^2 t}{\sin t \cdot \cos^2 t} dt = 3\int \frac{dt}{\sin t} + 3\int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt =$$

перший з отриманих інтегралів можна знайти або за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, або скористатися додатковими формулами таблиці невизначених інтегралів; а другий – методом заміни змінної:

$$= 3\int \frac{dt}{\sin t} - 3\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = 3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \frac{3}{\cos t} + C =$$

$$= 3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)}{2}\right| + \sqrt{x^2+9} + C.$$

38. $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-3x-4}}.$

Розв'язання. Заданий тип інтегралів за допомогою підстановки (8.8) зводиться до розглянутого у прикладах 13, 14 інтегралів, які, зі свого боку, зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрата.

$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-3x-4}} = \begin{bmatrix} x+5=\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{t}-5 \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-5\right)^2-3\left(\frac{1}{t}-5\right)-4}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-10t+25t^2-3t+15t^2-4t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{36t^2-13t+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(6t-\frac{13}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{12}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|6t-\frac{13}{12}+\sqrt{\left(6t-\frac{13}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{12}\right)^2}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|6t-\frac{13}{12}+\sqrt{36t^2-13t+1}\right|+C =$$

повернемося до початкових змінних

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{6}{x+5}-\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{36}{(x+5)^2}-\frac{13}{x+5}+1}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{7-13x}{x+5}+\sqrt{x^2-3x-4}\right|+C.$$

Завдання 11.1

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{2x^3-5\sqrt[3]{x^7}+3x^5}{4x^4}dx.$
2. $\int (8x^3-6\cos x+e^x)dx.$
3. $\int \frac{dx}{4x-7}.$
4. $\int \sin(5x+3)\,dx.$
5. $\int \sqrt{1-6x}\,dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 7x}}{\cos^2 7x}dx.$
7. $\int \frac{e^{\operatorname{arcctg}6x}dx}{1+36x^2}.$
8. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}.$
9. $\int \frac{dx}{9x^2+5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2-1}.$
12. $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{6x^2+4}}.$
13. $\int \frac{dx}{x^2+6x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}.$
15. $\int \frac{(x-4)\,dx}{3x^2-5x+7}.$
16. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{8+x-7x^2}}.$
17. $\int \frac{2x^5-6x^3+4x^2+7}{x-2}dx.$
18. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)}dx.$
19. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx.$
20. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx.$
21. $\int x^2\cos 3x\,dx.$
22. $\int (3x-1)e^{5x}dx.$
23. $\int \ln(x-4)\,dx.$
24. $\int x\operatorname{arctg}4x\,dx.$
25. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$
26. $\int e^{\frac{x}{2}}\sin 5x\,dx.$
27. $\int \frac{dx}{2\cos x-3\sin x+8}.$
28. $\int \frac{dx}{7-2\cos^2 x-5\sin^2 x}.$
29. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx.$
30. $\int \sin^5 3x\cos^6 3x\,dx.$
31. $\int \sin^4 4x\cos^2 4x\,dx.$
32. $\int \sin 6x\cos 9x\,\,dx.$
33. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
34. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}+1}dx.$
35. $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx.$
36. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx.$
37. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+9}}.$
38. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-3x+5}}.$

Завдання 11.2

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^2-2\sqrt[5]{x^4}-9x^6}{3x^5}dx.$

2. $\int (6x^7 - 3\sin x + 5^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+5}.$

4. $\int \cos(2x-7)\,dx.$

5. $\int \sqrt[6]{(2+5x)^{11}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3(6x-1)}}{(6x-1)}dx.$

7. $\int \frac{e^{\arccos 4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\mathrm{arctg}^2\, 5x(1+25x^2)}.$

9. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+25}}.$

11. $\int \frac{(3x+7)dx}{7x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-5x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+12}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-8x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{6x^2-2x-9}.$

16. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{\sqrt{4x^2+x-5}}.$

17. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2-x}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+5x+6)}.$

19. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

20. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int x\sin(5x+2)\,dx.$

22. $\int (x^2+1)e^{4x}dx.$

23. $\int x\cdot\ln(3x-1)\,dx.$

24. $\int \arcsin 8x\,dx.$

25. $\int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}dx.$

26. $\int e^{4x}\cos 2x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x-2\sin x-1}.$

28. $\int \frac{dx}{6+\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(2+\sin x)^2}}dx.$

30. $\int \sin^4 2x\cos^7 2x\,dx.$

31. $\int \sin^6 5x\,dx.$

32. $\int \sin 5x\sin 3x\;dx.$

33. $\int \frac{3dx}{1+\sqrt{x}-2}.$

34. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}.$

35. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}.$

37. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+5x+6}}.$

Завдання 11.3

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^8+3\sqrt[7]{x^2}-6x^6}{x^9}dx.$
2. $\int \left(5x^2 - \frac{3}{\cos^2 x} - 7^x\right)dx.$
3. $\int \frac{dx}{3x+4}.$
4. $\int \sin(9x-3)\,dx.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+5x}}.$
6. $\int \frac{\sqrt[4]{\arcsin^5 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$
7. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx.$
8. $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}.$
9. $\int \frac{dx}{3x^2-4}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+7}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{3x^2+8}.$
12. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{11-2x^2}}.$
13. $\int \frac{dx}{x^2-4x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x+9}}.$
15. $\int \frac{(4x-2)\,dx}{3x^2-5x+7}.$
16. $\int \frac{(7x+1)\,dx}{\sqrt{8+x-7x^2}}.$
17. $\int \frac{3x^5-x^4-5x^2+13}{x+2}dx.$
18. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$
19. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$
20. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}dx.$
21. $\int (x^2+7x)\cos 2x\,dx.$
22. $\int xe^{4x+3}dx.$
23. $\int \ln(3x-5)\,dx.$
24. $\int x^2\,\mathrm{arcctg}5x\,dx.$
25. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$
26. $\int e^{2x}\sin 7x\,dx$
27. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x-9}.$
28. $\int \frac{dx}{4+\cos^2 x-3\sin^2 x}.$
29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx.$
30. $\int \sin^5 7x\cos^8 7x\,dx.$
31. $\int \sin^2 5x\cos^4 5x.$
32. $\int \cos 3x\cos 8x\;dx.$
33. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx.$
34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}.$
35. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$
36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx.$
37. $\int x^2\sqrt{49-x^2}dx.$
38. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-x-2}}.$

Завдання 11.4

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^4+3\sqrt[9]{x^2}-5x^7}{x^6}dx.$

2. $\int \left(3x^8-\frac{7}{1+x^2}+4e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{8x-3}.$

4. $\int \cos(7x-9)\,dx.$

5. $\int \sqrt[8]{(4+5x)^3}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\mathrm{ctg}^5 2x}}{\sin^2 2x}dx.$

7. $\int \frac{x^3dx}{5+2x^4}.$

8. $\int \frac{dx}{\arccos^3 5x\sqrt{1-25x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$

11. $\int \frac{(x-2)dx}{3x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+10}}.$

15. $\int \frac{(5x+4)\,dx}{x^2+3x+8}.$

16. $\int \frac{(4x-1)\,dx}{\sqrt{6+2x-x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^3-3x^2+6x}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{6x^2+35x+56}{(x+4)(x^2+x-6)}dx.$

19. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx.$

20. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

21. $\int x\sin(2x+1)\,dx.$

22. $\int (x^2+5x)e^{2x}dx.$

23. $\int x^3\ln x\,dx.$

24. $\int \arccos 6x\,dx.$

25. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

26. $\int e^{8x}\cos\frac{x}{3}dx$

27. $\int \frac{dx}{3\cos x-5\sin x-1}.$

28. $\int \frac{dx}{6+3\cos^2 x-\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx.$

30. $\int \sin^4 8x\cos^3 8x\,dx.$

31. $\int \sin^6 5x\,dx.$

32. $\int \sin 5x\cos 3x\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$

34. $\int \frac{1-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx.$

35. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-6x-8}}.$

Завдання 11.5

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

2. $\int \left(4x^7 + \frac{5}{x^2-9} + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{9x-3}.$

4. $\int \sin(7x+13)\,dx.$

5. $\int e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[5]{\arcsin^6 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

7. $\int \frac{\sin \ln x}{x}dx.$

8. $\int \frac{dx}{(9x+1)\sqrt{\ln(9x+1)}}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x^2}}.$

11. $\int \frac{xdx}{3x^2-2}.$

12. $\int \frac{(x-6)dx}{\sqrt{7x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+6x-7}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-x-5}}.$

15. $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2+4x+6}.$

16. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{\sqrt{4+5x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^5+3x^4-2x-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{3x^2-6x-21}{(x+5)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

20. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

21. $\int (x^2-x)\cos 7x\,dx.$

22. $\int x\,e^{4x+9}dx.$

23. $\int \ln(3x+2)\,dx.$

24. $\int x^2 \mathrm{arcctg} 2x\,dx.$

25. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

26. $\int e^{4x}\sin 6x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x+2\sin x-7}.$

28. $\int \frac{dx}{3+4\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt[3]{(1+\sin 5x)^4}}dx.$

30. $\int \cos^7 4x\,dx.$

31. $\int \sin^2 8x\cos^2 8x.$

32. $\int \sin 5x\sin 8x\;\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-4x}.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}.$

35. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}.$

36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)^3}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-9x+8}}.$

Завдання 11.6

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(2\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x^3}}dx.$
2. $\int \left(4x^5 - \frac{7}{\sqrt{4-x^2}} - 6^x\right)dx.$
3. $\int \frac{dx}{6x+11}.$
4. $\int \cos(7x+3)\,dx.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(3x-2)^3}}.$
6. $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos^9 5x}}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$
7. $\int \frac{dx}{2x - x\ln x}.$
8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x(1+4x^2)}.$
9. $\int \frac{dx}{6x^2-1}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$
11. $\int \frac{(8x-3)dx}{9x^2+4}.$
12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-5x^2}}.$
13. $\int \frac{dx}{4x^2-8x+5}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x-3x^2}}.$
15. $\int \frac{(6x+2)\,dx}{x^2-3x-2}.$
16. $\int \frac{(5x+6)\,dx}{\sqrt{5x^2-3x+8}}.$
17. $\int \frac{x^4+2x^3-3x^2-4}{x-4}dx.$
18. $\int \frac{2x^2+43x+116}{(x-2)(x^2+7x+12)}dx.$
19. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$
20. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$
21. $\int (3x-11)\sin 5x\,dx.$
22. $\int x^2 e^{8x}dx.$
23. $\int x^2\ln(x+2)\,dx.$
24. $\int \arcsin 7x\,dx.$
25. $\int \sin(\ln x)\,dx.$
26. $\int e^{8x}\cos 5x\,dx.$
27. $\int \frac{dx}{6\cos x+\sin x+2}.$
28. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x-5\sin^2 x}.$
29. $\int \sqrt[3]{1-2tg3x}\,\frac{dx}{\cos^2 3x}.$
30. $\int \sin^3 4x\cos^8 4x\,dx.$
31. $\int \cos^6 5x\,dx.$
32. $\int \cos 4x\cos 3x\,dx.$
33. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x}}.$
34. $\int \frac{x^2+\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx.$
35. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx.$
36. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$
37. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{81-x^2}}.$
38. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2+x-2}}.$

Завдання 11.7

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$.

2. $\int (4x^9 + 5\sin x - 8^x)dx$.

3. $\int \frac{dx}{6x-5}$.

4. $\int \sin(3x+5)\,dx$.

5. $\int \sqrt[8]{(2+7x)^5}\,dx$.

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^5 9x}}{1+81x^2}dx$.

7. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{5\sqrt{x}}$.

8. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(4x-1)}dx}{(4x-1)}$.

9. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}}$.

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2-5}$.

12. $\int \frac{(5x-3)\,dx}{\sqrt{9x^2+2}}$.

13. $\int \frac{dx}{4x^2-x-5}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$.

15. $\int \frac{(4x+5)dx}{3x^2-5x+7}$.

16. $\int \frac{(5x-7)dx}{\sqrt{1+x-4x^2}}$.

17. $\int \frac{3x^5-6x^4-2x+3}{x+1}dx$.

18. $\int \frac{3x^2+15x-72}{(x-3)(x^2+2x-8)}dx$.

19. $\int \frac{4x^2-25x-39}{(x+1)(x^2-3x-4)}dx$.

20. $\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$.

21. $\int (5x^2 - x)\sin 2x\,dx$.

22. $\int xe^{7x+12}dx$.

23. $\int \ln(x+5)\,dx$.

24. $\int x^2 \operatorname{arctg} 5x\,dx$.

25. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

26. $\int e^{-2x}\sin 9x\,dx$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x - 2\sin x + 5}$.

28. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x - 2\sin^2 x}$.

29. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$.

30. $\int \sin^5 9x\,dx$.

31. $\int \sin^2 3x \cos^4 3x$.

32. $\int \cos 6x \cos 3x\ \ dx$.

33. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x-4}}dx$.

34. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

35. $\int \frac{x^4}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$.

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6}dx$.

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

38. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2+4x+3}}$.

Завдання 11.8

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^4 - 2\sqrt[4]{x^7} - 8x^6}{x^6} dx.$

2. $\int (5x^4 - \sin x + 3e^x) dx.$

3. $\int \frac{dx}{7x+6}.$

4. $\int \cos(2x-8)\, dx.$

5. $\int \sqrt{1-e^x} e^x\, dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{arctg}^2 5x}}{1+25x^2} dx.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 2x} dx}{\sin^2 2x}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2}}.$

11. $\int \frac{(9x-2)dx}{3x^2+4}.$

12. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{7-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x-9x^2}}.$

15. $\int \frac{(3x-6)\, dx}{2x^2-x-5}.$

16. $\int \frac{(4x+5)\, dx}{\sqrt{2x^2+5x-1}}.$

17. $\int \frac{3x^4+2x^3-4x^2-7}{x-4} dx.$

18. $\int \frac{4x^2+26x+82}{(x+7)(x^2+9x+20)} dx.$

19. $\int \frac{x^2-17x-34}{(x^2-4)(x-2)} dx.$

20. $\int \frac{8x}{x^3+27} dx.$

21. $\int x\cos(4x-7)\, dx.$

22. $\int (x^2+5x-3)e^{2x} dx.$

23. $\int x^4 \ln(x+1)\, dx.$

24. $\int \arccos x\, 2x\, dx.$

25. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx.$

26. $\int 3^x \cos x\, dx.$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x - 3\sin x - 5}.$

28. $\int \frac{dx}{5+4\cos^2 x + \sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{(1-\cos 2x)^3}} dx.$

30. $\int \sin^3 2x \cos^{12} 2x\, dx.$

31. $\int \sin^4 7x\, dx.$

32. $\int \sin 8x \cos 3x\ \ dx.$

33. $\int \frac{dx}{(8+x)\sqrt{x+1}}.$

34. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} dx.$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx.$

36. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\, dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+8)\sqrt{x^2-x-2}}.$

Завдання 11.9

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{5x^2+\sqrt[9]{x^2}+4x^5}{x^3}dx$.

2. $\int \left(9x^4 + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7^x\right)dx$.

3. $\int \frac{dx}{2x-11}$.

4. $\int \sin(3x+7)\,dx$.

5. $\int \sqrt[7]{(3+8x)^4}\,dx$.

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\mathrm{arcctg}^5 3x}}{1+25x^2}dx$.

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x-2}}dx}{\sqrt{x-2}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\arcsin^2 4x}\sqrt{1-16x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$.

11. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3}$.

12. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{\sqrt{4-6x^2}}$.

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x-5}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

15. $\int \frac{(7x+4)\,dx}{x^2-2x+7}$.

16. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{9-2x-4x^2}}$.

17. $\int \frac{4x^4-2x^3+5x+7}{x-5}dx$.

18. $\int \frac{3x^2-40x-11}{(x-1)(x^2-6x-7)}dx$.

19. $\int \frac{2x^2+29x+40}{x^3+8x^2}dx$.

20. $\int \frac{5x^2+28x+47}{(x-1)(x^2+6x+13)}dx$.

21. $\int x^2 \sin 8x\,dx$.

22. $\int (5x+4)e^{2x}dx$.

23. $\int \ln(3x+7)\,dx$.

24. $\int x\,\mathrm{arcctg}5x\,dx$.

25. $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}dx$.

26. $\int e^{8x}\sin 3x\,dx$.

27. $\int \frac{dx}{7\cos x-2\sin x-5}$.

28. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x-2\sin^2 x}$.

29. $\int \sqrt[3]{1-4\sin 2x}\cos 2x\,dx$.

30. $\int \cos^7 5x\,dx$.

31. $\int \sin^2 5x\cos^4 5x\,dx$.

32. $\int \sin 6x\sin 8x\;dx$.

33. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-5x}}$.

34. $\int \frac{x\sqrt{5+2x}}{\sqrt[3]{5+2x}-1}dx$.

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}\,dx$.

36. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$.

37. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

38. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-7x+12}}$.

Завдання 11.10

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^5+3\sqrt[8]{x^5}-4x^3}{x^4}dx.$

2. $\int \left(3x^8 - \frac{5}{\sin^2 x} - 3^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{9x-2}.$

4. $\int \sin(4x+8)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{tg^7 3x}}{cos^2 3x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\arcsin 4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arccos 5x}\sqrt{1-25x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(7x-9)dx}{3x^2-4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+3}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2x-1}}.$

15. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2x^2+5x+3}.$

16. $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{4-2x-9x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^3-5x^2-8x-2}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{6x^2-19x-37}{(x-5)(x^2+5x-6)}dx.$

19. $\int \frac{4x^2+8x-7}{(x+2)(x^2+5x+6)}dx.$

20. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx.$

21. $\int x\cos(7x-5)\,dx.$

22. $\int x^2 e^{2x}dx.$

23. $\int x^5 \ln x\,dx.$

24. $\int \arccos 9x\,dx.$

25. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx.$

26. $\int e^{4x}\cos 5x\,dx$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x+\sin x-5}.$

28. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+2\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^5}dx.$

30. $\int \sin^8 2x\cos^3 2x\,dx.$

31. $\int \cos^6 2x.$

32. $\int \cos 8x\cos 5x\,dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-1}dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{x+8}+4}dx.$

35. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{(x^2+4)^5}}{x^6}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-x-12}}.$

Завдання 11.11

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^8+2\sqrt[5]{x^2}+2x^6}{4x^5}dx.$

2. $\int \left(2x^4 - \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{2x+7}.$

4. $\int \cos(3x-1)\,dx.$

5. $\int \sqrt[8]{(5-3x)^7}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(3x-1)}}{3x-1}dx.$

7. $\int e^{3x^7-3}x^6 dx.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 2x\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2-13}.$

12. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+5}}.$

15. $\int \frac{(7x-5)\,dx}{2x^2+6x+15}.$

16. $\int \frac{(9x-2)\,dx}{\sqrt{6-2x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{5x^4+3x^3-4x-1}{x-2}dx.$

18. $\int \frac{7x^2+43x-128}{(x-2)(x^2+2x-15)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+17x-15}{x^3+5x^2}dx.$

20. $\int \frac{4x^3-4x^2+7x-19}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int (3x^2-7)\cos 5x\,dx.$

22. $\int xe^{9x+8}dx.$

23. $\int \ln(6x+4)\,dx.$

24. $\int x\,\mathrm{arcctg}2x\,dx.$

25. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

26. $\int 5^x \cos 4x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-7}.$

28. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+6\sin^2 x}.$

29. $\int \sqrt[3]{1-4\cos 3x}\sin 3x\,dx.$

30. $\int \sin^5 4x\,dx.$

31. $\int \sin^2 7x\cos^2 7x dx.$

32. $\int \sin 5x\cos 2x\;\,dx.$

33. $\int x\sqrt{1-3x}dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[4]{(x+5)^3}+1}dx.$

35. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+9}}.$

37. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2-6x+5}}.$

Завдання 11.12

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^5+3\sqrt[3]{x^2}-8x^2}{4x^3}dx.$

2. $\int (9x^4 - 3\cos x - 5^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{8x+6}.$

4. $\int \sin(9x-2)\,dx.$

5. $\int \sqrt{4x-3}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{tg}^3 7x}}{\cos^2 7x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\mathrm{arcctg} 6x}dx}{1+36x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{7x^2-4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2+3}.$

12. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+19}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-1)dx}{2x^2-x-4}.$

16. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^3-5x+1}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{x^2-21x-54}{(x-3)(x^2+9x+18)}dx.$

19. $\int \frac{8x^2+18x-8}{x^3+4x^2}dx.$

20. $\int \frac{5x^2+15x+40}{(x-1)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int (x+5)\cos 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{9x}dx.$

23. $\int x^3 \ln(x+2)\,dx.$

24. $\int \mathrm{arccos} 6x\,dx.$

25. $\int \mathrm{arctg}\left(1+\sqrt{x}\right)\,dx.$

26. $\int 3^x \sin 7x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-3}.$

28. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x-1}.$

29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[7]{(1-\cos 2x)^2}}dx.$

30. $\int \sin^3 7x\cos^2 7x\,dx.$

31. $\int \sin^6 4x\,dx.$

32. $\int \sin 6x\sin 5x\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+3}}.$

34. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}.$

35. $\int x\sqrt{8-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx.$

37. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-x-6}}.$

Завдання 11.13

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^6-3\sqrt[4]{x^9}-8x^5}{x^4}dx.$

2. $\int \left(3x^9+\frac{2}{\cos^2 x}+4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x-3}.$

4. $\int \cos(x-2)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x+5}}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{\mathrm{ctg}^5 2x}\,\sin^2 2x}.$

7. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}4x}dx}{1+16x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(6x+1)\ln^2(6x+1)}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}.$

11. $\int \frac{(6x+4)\,dx}{4x^2-9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+2x-1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}.$

15. $\int \frac{(x-4)dx}{2x^2-3x+9}.$

16. $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{9-x-9x^2}}.$

17. $\int \frac{2x^5-4x^2+3x-4}{x-1}dx.$

18. $\int \frac{8x^2-21x+5}{(x+3)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{8x^2+21x+12}{x^3+4x^2+4x}dx.$

20. $\int \frac{3x^3+2x^2+6x-7}{x^4+5x^2+4}dx.$

21. $\int (x^2-7)\sin 2x\,dx.$

22. $\int xe^{3x+2}dx.$

23. $\int \ln(5x-4)\,dx.$

24. $\int x^2\mathrm{arcctg}x\,dx.$

25. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$

26. $\int e^{6x}\sin 3x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{\cos x+5\sin x-9}.$

28. $\int \frac{dx}{6-2\cos^2 x+3\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin x}{(4-\cos x)^2}dx.$

30. $\int \sin^3 5x\cos^8 5x\,dx.$

31. $\int \sin^4 2x\cos^2 2x\,dx.$

32. $\int \cos 3x\cos 2x\,\,dx.$

33. $\int x\sqrt[3]{1+5x}dx.$

34. $\int \frac{1-\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt[3]{2x+1}}dx.$

35. $\int x\sqrt{x^2+9}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{x^2}dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+9x+20}}.$

Завдання 11.14

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(3x-2\sqrt[5]{x^4}\right)^2}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \left(4x^5+\frac{3}{\sin^2 x}-4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-7}.$

4. $\int \sin(2x+5)\,dx.$

5. $\int \sqrt[7]{(7x-4)^2}dx.$

6. $\int \sqrt{\cos 3x}\sin 3x\,dx.$

7. $\int \frac{e^{\arcsin 5x}dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\mathrm{arctg}^2\,2x(1+4x^2)}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-1}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{8x^2+3}.$

12. $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+9}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$

15. $\int \frac{(3x-5)dx}{4x^2-5x-1}.$

16. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6-x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5-2x^2+3x}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{3x^2+28x+33}{(x-1)(x^2+6x+5)}dx.$

19. $\int \frac{5x^2+20x+18}{x(x^2+6x+9)}dx.$

20. $\int \frac{4x^3-3x^2+5x-4}{x^4+3x^2+2}dx.$

21. $\int x\cos 7x\,dx.$

22. $\int (5x+1)e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x-4)\,dx.$

24. $\int x\,\mathrm{arctg}4x\,dx.$

25. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx.$

26. $\int e^{9x}\cos 5x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x+2\sin x-1}.$

28. $\int \frac{dx}{5+3\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx.$

30. $\int \cos^7 x\,dx.$

31. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x dx.$

32. $\int \sin 4x\cos 7x\;\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{6x+2}}.$

34. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+4}dx.$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx.$

36. $\int x^3\sqrt{x^2+16}\,dx.$

37. $\int x\sqrt{25-x^2}\,dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+6x+8}}.$

Завдання 11.15

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(4\sqrt[3]{x}+3x^2\right)^3}{x^3}dx.$

2. $\int \left(7x^3 - \frac{5}{\sqrt{x^2+9}} - 9^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+13}.$

4. $\int \cos(4x-11)\,dx.$

5. $\int \sqrt{(3x-7)^5}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[8]{\mathrm{arctg}^3 2x}}{1+4x^2}dx.$

7. $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}.$

8. $\int \frac{dx}{(2x-4)\sqrt{\ln(2x-4)}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2+2}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$

11. $\int \frac{(3x-7)dx}{4x^2-7}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+10}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}.$

15. $\int \frac{(3x+2)dx}{3x^2-2x-1}.$

16. $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{9+2x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5+x^4-3x^2-2}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{3x^2-22x+7}{(x-1)(x^2+2x-15)}dx.$

19. $\int \frac{3x^2+7x+4}{(x+1)(x^2+4x+3)}dx.$

20. $\int \frac{6x^2+12x+22}{(x+3)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2\cos 5x\,dx.$

22. $\int (6x-1)e^{4x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x+1)\,dx.$

24. $\int \mathrm{arsin}8x\,dx.$

25. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$

26. $\int e^{4x}\sin 7x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x+\sin x-6}.$

28. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x-3\sin^2 x-4}.$

29. $\int \frac{\cos x+2\sin x}{(\sin x-2\cos x)^2}dx.$

30. $\int \sin^5 5x\cos^2 5x\,dx.$

31. $\int \cos^6 4x\,dx.$

32. $\int \sin 2x\sin 3x\,dx.$

33. $\int (x+3)\sqrt{x-1}dx.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}dx.$

35. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^5}dx.$

37. $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-x+2}}.$

Завдання 11.16

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{4x^3-7\sqrt[4]{x^9}-2x^5}{x^4}dx.$
2. $\int \left(2x^3+\frac{4}{\sqrt{x^2-9}}-e^x\right)dx.$
3. $\int \frac{dx}{4x+7}.$
4. $\int \sin(11x+3)\,dx.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-9)^2}}.$
6. $\int \frac{\arcsin^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$
7. $\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}dx}{\cos^2 x}.$
8. $\int \frac{dx}{(5x-4)\sqrt{\ln(5x-4)}}.$
9. $\int \frac{dx}{9x^2-4}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2+1}.$
12. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{9-5x^2}}.$
13. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+10}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x-x^2}}.$
15. $\int \frac{(x-4)\,dx}{5x^2+2x+1}.$
16. $\int \frac{(3x-7)\,dx}{\sqrt{3x^2+4x-4}}.$
17. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+7x}{x-4}dx.$
18. $\int \frac{9x+15}{(x+4)(x^2-9)}dx.$
19. $\int \frac{5x^2+x-56}{(x-3)(x^2+2x-15)}dx.$
20. $\int \frac{8x^2+23x+97}{(x-3)(x^2+4x+13)}dx.$
21. $\int (4x-3)\sin 2x\,dx.$
22. $\int x^2 e^{9x+11}dx.$
23. $\int \ln(5x-1)\,dx.$
24. $\int x\,\mathrm{arcctg}7x\,dx.$
25. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$
26. $\int e^{9x}\cos 3x\,dx.$
27. $\int \frac{dx}{6\cos x+\sin x-2}.$
28. $\int \frac{dx}{9-3\cos^2 x+2\sin^2 x}.$
29. $\int \frac{\cos x}{16+\sin^2 x}dx.$
30. $\int \sin^3 3x\cos^8 3x\,dx.$
31. $\int \sin^4 4x\,dx.$
32. $\int \cos 5x\cos 13x\;dx.$
33. $\int \frac{dx}{5+\sqrt{x+1}}.$
34. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$
35. $\int x^3\sqrt{16-x^2}\,dx.$
36. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx.$
37. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$
38. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-x-6}}.$

Завдання 11.17

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(7\sqrt[4]{x}-2x^3\right)^2}{x^5}dx.$

2. $\int \left(3x^9+\frac{6}{\cos^2 x}-3^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x+12}.$

4. $\int \cos(4x-7)\,dx.$

5. $\int \sqrt{9+5x}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{4x}dx}{5+3e^{4x}}.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x\sqrt{\operatorname{tg}5x}}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(9x+1)dx}{3x^2-4}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+1}}.$

13. $\int \frac{dx}{6x^2+6x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2x+5}}.$

15. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-5x+9}.$

16. $\int \frac{(5x-1)\,dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5-3x^2-4}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{x^2+24x+24}{(x-3)(x^2+6x+8)}dx.$

19. $\int \frac{-2x^2+27x-28}{x^3-4x^2}dx.$

20. $\int \frac{4x^2-7x+39}{(x+5)(x^2-4x+13)}dx.$

21. $\int x^2\cos(3x-9)\,dx.$

22. $\int xe^{2x}dx.$

23. $\int x^2\ln(x+2)\,dx.$

24. $\int \arcsin 9x\,dx.$

25. $\int (\arccos x)^2\,dx.$

26. $\int 5^x\cos 3x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{\cos x+6\sin x+9}.$

28. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin x)^3}}dx.$

30. $\int \sin^7 x\,dx.$

31. $\int \sin^2 5x\cos^2 5x\,dx.$

32. $\int \sin 2x\cos 8x\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}.$

34. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx.$

35. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

36. $\int x^5\sqrt{x^2+25}\,dx.$

37. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x-21}}.$

Завдання 11.18

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^3-2\sqrt[7]{x^2}-4x^8}{x^5}dx.$

2. $\int \left(3x^7+\frac{5}{\sqrt{x^2+5}}+7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{4x+5}.$

4. $\int \sin(9x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{\mathrm{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}dx.$

7. $\int x^4\,e^{7x^5-4}dx.$

8. $\int \frac{dx}{\arccos 8x\sqrt{1-64x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}.$

11. $\int \frac{(x+6)dx}{2x^2+9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{8x^2+2x-3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(5x+6)\,dx}{x^2-2x+7}.$

16. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}.$

17. $\int \frac{x^4-2x-3}{x+5}dx.$

18. $\int \frac{2x^2-29x+32}{(x+4)(x^2-3x+2)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2-17x+12}{(x-2)(x^2+3x-10)}dx.$

20. $\int \frac{x^3+x^2+9x-33}{x^4+10x^2+9}dx.$

21. $\int (7x-9)\sin 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x+5)\,dx.$

24. $\int x^2\,\mathrm{arctg}x\,dx.$

25. $\int \frac{\arccos x}{x^2}dx.$

26. $\int 4^x \sin 8x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x-8}.$

28. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x-1}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+6}}dx.$

30. $\int \sin^7 4x\cos^2 4x\,dx.$

31. $\int \sin^4 5x\,dx.$

32. $\int \sin x\sin 9x\;dx.$

33. $\int (x+3)\sqrt{x}\,dx.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{4x+1}}.$

35. $\int x^5\sqrt{25-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^6}dx.$

37. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-3x-2}}.$

Завдання 11.19

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(5\sqrt[4]{x}-2x^2\right)^3}{x^7}dx.$

2. $\int (7x^2 + 3\cos x - 2^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x-3}.$

4. $\int \cos(18x+7)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x\sqrt[3]{\mathrm{ctg}5x}}.$

7. $\int \frac{e^{\arcsin 3x}dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

8. $\int \frac{\ln^5(7x-2)dx}{7x-2}.$

9. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(2x-11)dx}{3x^2+8}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9x^2-1}}.$

13. $\int \frac{dx}{2x^2+x+3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2-2x-5}}.$

15. $\int \frac{(x+9)\,dx}{x^2-5x+2}.$

16. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{\sqrt{6+5x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-8x^2-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{5x^2+36x+19}{(x-1)(x^2+5x+4)}dx.$

19. $\int \frac{-x^2+13x+31}{(x-3)(x^2-x-6)}dx.$

20. $\int \frac{8x^2+63x+196}{(x+4)(x^2+8x+25)}dx.$

21. $\int x\cos(3x-13)\,dx.$

22. $\int (x^2+4)e^{9x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-2)\,dx.$

24. $\int \arccos 7x\,dx.$

25. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx.$

26. $\int e^{7x}\sin 8x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x-4}.$

28. $\int \frac{dx}{11+2\cos^2 x-7\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{5\sin x-3}}dx.$

30. $\int \sin^2 6x\cos^7 6x\,dx.$

31. $\int \cos^6 2x\,dx.$

32. $\int \sin 3x\cos 12x\,dx.$

33. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[4]{x+1}+1\right)}.$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$

36. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx.$

37. $\int \frac{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3}{x^4}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+6)\sqrt{x^2+x-2}}.$

Завдання 11.20

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^2-4\sqrt[3]{x^5}-2x^4}{4x^5}dx.$

2. $\int(2x^8+3\sin x+8^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-8}.$

4. $\int \sin(13x-4)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{\arccos^2 5x\sqrt{1-25x^2}}.$

7. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}2x}dx}{1+4x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(5x-7)\sqrt{\ln(5x-7)}}.$

9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}.$

11. $\int \frac{(6x-4)dx}{5x^2+7}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+3}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x-9}}.$

15. $\int \frac{(x-6)\,dx}{x^2-3x-8}.$

16. $\int \frac{(6x+2)\,dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{8x^3-x^2+3x+5}{x-1}dx.$

18. $\int \frac{2x^2-26x+54}{x^3-5x^2+6x}dx.$

19. $\int \frac{3x^2-31x-58}{(x-4)(x^2-6x+8)}dx.$

20. $\int \frac{2x^2-26x+33}{(x-2)(x^2-8x+25)}dx.$

21. $\int x^2\sin 8x\,dx.$

22. $\int(2x+7)e^{3x}dx.$

23. $\int \ln(x+9)\,dx.$

24. $\int x\,\mathrm{arctg}2x\,dx.$

25. $\int(\arccos x)^2\,dx.$

26. $\int e^{5x}\cos 3x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{2\cos x-5\sin x-4}.$

28. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x+1}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-9}dx.$

30. $\int \sin^2 2x\cos^5 2x\,dx.$

31. $\int \sin^4 7x\,dx.$

32. $\int \sin 3x\sin 10x\,dx.$

33. $\int(x+6)\sqrt{1-x}\,dx.$

34. $\int \frac{1-\sqrt{3x-1}}{1+\sqrt[3]{3x-1}}dx.$

35. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^7}dx.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)^5}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-x-20}}.$

Завдання 11.21

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{5x^8+4\sqrt[3]{x^5}-3x^2}{x^4}dx.$

2. $\int \left(4x^5 - \frac{6}{\cos^2 x} - 7^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x+15}.$

4. $\int \cos(2x+4)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{tg^2 3x}{cos^2 3x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{4x^2-7}.$

12. $\int \frac{(5x+3)\,dx}{\sqrt{7x^2+4}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$

15. $\int \frac{(x-7)\,dx}{2x^2-5x+2}.$

16. $\int \frac{(4x+1)\,dx}{\sqrt{6-x-4x^2}}.$

17. $\int \frac{x^3-3x^2+5x-11}{x-5}dx.$

18. $\int \frac{4x^2-49x+97}{(x-3)(x^2-7x+10)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+11x+48}{(x+2)(x^2-2x-8)}dx.$

20. $\int \frac{7x^2-11x+14}{x^3-2x^2+x-2}dx.$

21. $\int (9x+3)\cos 4x\,dx.$

22. $\int x^2 e^{4x-12}dx.$

23. $\int x^2 \ln(x+2)\,dx.$

24. $\int \arccos 4x\,dx.$

25. $\int x^2 \mathrm{arctg} 5x\,dx$.

26. $\int e^{9x}\sin 2x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x+4\sin x-3}.$

28. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-\sin^2 x+8}.$

29 $\int \left(4-\sqrt[3]{\sin 2x}\right)\cos 2x\,dx.$

30. $\int \cos^7 3x\,dx.$

31. $\int \sin^2 6x\cos^2 6x\;\;dx.$

32. $\int \sin 12x\cos 5x\;\;dx.$

33. $\int \frac{\sqrt{x-4}\,dx}{1+\sqrt{x-4}}.$

34. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx.$

35. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

36. $\int \sqrt{x^2+16}\,dx.$

37. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-8x+24}}.$

Завдання 11.22

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(5\sqrt[4]{x^3}-3x^7\right)^2}{x^{10}}dx.$

2. $\int \left(7x^3 - \frac{5}{\sin^2 x} + e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{2x-13}.$

4. $\int \sin(6x+1)\,dx.$

5. $\int \sqrt[5]{(2x-3)^4}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{\arcsin^4 4x\,dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-2}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6}}.$

11. $\int \frac{(x+14)\,dx}{4x^2+1}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-8}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(2x-4)dx}{x^2+3x+7}.$

16. $\int \frac{(x+7)\,dx}{\sqrt{4x^2+x+3}}.$

17. $\int \frac{x^5-2x^2-x+5}{x+1}dx.$

18. $\int \frac{5x^2-64x+83}{(x-7)(x^2+2x-3)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+36x-81}{x^3+9x^2}dx.$

20. $\int \frac{9x^2+27x+16}{(x+4)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2 \sin 9x\,dx.$

22. $\int (4x-9)e^{5x}dx.$

23. $\int \ln(2x-1)\,dx.$

24. $\int x\operatorname{arctg}6x\,dx.$

25. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

26. $\int e^{2x}\cos 7x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x}.$

28. $\int \frac{dx}{3-2\cos^2 x+\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{(1-\sin 4x)^3}}dx.$

30. $\int \sin^5 8x\cos^2 2x\,dx.$

31. $\int \sin^6 x\,dx.$

32. $\int \sin 8x\sin 7x\;dx.$

33. $\int (x+3)\sqrt{x}dx.$

34. $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx.$

35. $\int x\sqrt{8-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-16)^5}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2+3x+2}}.$

Завдання 11.23

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{7x^3+4\sqrt[3]{x^8}-x^5}{x^4}dx.$
2. $\int \left(4x^7+\frac{5}{x^2-4}+e^x\right)dx.$
3. $\int \frac{dx}{3x-8}.$
4. $\int \cos(6x+9)\,dx.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-1)^5}}.$
6. $\int \frac{arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$
7. $\int \frac{e^{6x}dx}{1+e^{12x}}.$
8. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 2x\cos^2 2x}.$
9. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}.$
11. $\int \frac{(3x-1)dx}{8x^2-9}.$
12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+4}}.$
13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}}.$
15. $\int \frac{(4x-2)dx}{4x^2+x+6}.$
16. $\int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{9+x-2x^2}}.$
17. $\int \frac{x^4+x^3-3x^2-5x}{x-2}dx.$
18. $\int \frac{6x^2+53x+83}{(x+1)(x^2-5x-24)}dx.$
19. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+10x+25)}dx.$
20. $\int \frac{4x^2+9x+53}{(x-2)(x^2+6x+13)}dx.$
21. $\int x\cos(3x-7)\,dx.$
22. $\int (x^2+1)e^{9x}dx.$
23. $\int x^3\ln(x+1)\,dx.$
24. $\int \arcsin 2x\ \,dx.$
25. $\int x^3 \arccos\frac{1}{x}\ dx.$
26. $\int e^{3x}\sin 8x\,dx.$
27. $\int \frac{dx}{2\cos x-7\sin x}.$
28. $\int \frac{dx}{9-\cos^2 x+4\sin^2 x}.$
29. $\int \frac{\sin x}{(9-\cos x)^4}dx.$
30. $\int \sin^2 3x\cos^7 3x\,dx.$
31. $\int \cos^6 5x\ \,dx.$
32. $\int \cos 5x\cos 13x\ \,dx.$
33. $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+6}}.$
34. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{2x-1}}.$
35. $\int \sqrt{8-x^2}\,dx.$
36. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^7}dx.$
37. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx.$
38. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-2x-35}}.$

Завдання 11.24

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(2x^4-3\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{x^5}\,dx.$

2. $\int \left(3x^8 - \frac{4}{x^2+25} - e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x-7}.$

4. $\int \sin(9x+8)\,dx.$

5. $\int \sqrt[4]{3x-2}\,dx.$

6. $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 8x}{\sin^2 8x}\,dx.$

7. $\int \frac{e^{\arccos 5x}dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

8. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(5x-3)}dx}{5x-3}.$

9. $\int \frac{dx}{5x^2-9}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{4x^2+13}.$

12. $\int \frac{(8x+3)\,dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-3x-4x^2}}.$

15. $\int \frac{(x-11)dx}{3x^2+x+7}.$

16. $\int \frac{(4x-8)\,dx}{\sqrt{9x^2-2x+9}}.$

17. $\int \frac{x^3-4x^2-3x-4}{x+5}\,dx.$

18. $\int \frac{18x+48}{(x+2)(x^2+3x-10)}\,dx.$

19. $\int \frac{3x^2+16x-51}{(x-3)(x^2-9)}\,dx.$

20. $\int \frac{7x^3+4x^2+34x+15}{x^4+9x^2+20}\,dx.$

21. $\int (x^2+5)\cos x\,dx.$

22. $\int x\,e^{4x+7}dx.$

23. $\int \ln(3x+8)\,dx.$

24. $\int x\operatorname{arcctg}4x\,dx.$

25. $\int \frac{x\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx.$

26. $\int e^{11x}\cos 3x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{\cos x+4\sin x-7}.$

28. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x+3}.$

29. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+9}.$

30. $\int \sin^4 4x\cos^5 4x\,dx.$

31. $\int \sin^2 5x\cos^4 5x\;dx.$

32. $\int \sin 2x\cos 11x\;dx.$

33. $\int \frac{x^2dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx.$

36. $\int x\sqrt{x^2+25}\,dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}\,dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-9x+14}}.$

Завдання 11.25

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^8+2\sqrt[5]{x^2}-4x^5}{2x^2}dx.$

2. $\int \left(3x^7 - \frac{8}{\sqrt{9-x^2}} + 6^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{4x+15}.$

4. $\int \cos(8x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{\arcsin^5 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

7. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}2x}dx}{1+4x^2}.$

8. $\int \frac{\ln^3(x+3)\,dx}{x+3}.$

9. $\int \frac{dx}{8x^2+1}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

11. $\int \frac{(9x+13)dx}{4x^2-12}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10x^2-1}}.$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+8x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+9}}.$

15. $\int \frac{(x-5)\,dx}{3x^2-8x+12}.$

16. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{4-3x-5x^2}}.$

17. $\int \frac{x^5+4x^2-8x}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{9x^2+10x-57}{(x-1)(x^2+8x+15)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+33x-66}{(x-2)(x^2+4x-12)}dx.$

20. $\int \frac{4x^2+15x+89}{(x-7)(x^2+8x+25)}dx.$

21. $\int x\sin(4x+9)\,dx.$

22. $\int x^2e^{8x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-2)\,dx.$

24. $\int \arcsin 9x\,dx.$

25. $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{5x-1}\,dx.$

26. $\int 9^x\cos 3x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{6\cos x+7\sin x}.$

28. $\int \frac{dx}{5+\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx.$

30. $\int \sin^7 2x\,dx.$

31. $\int \sin^4 5x\cos^2 5x\,dx.$

32. $\int \sin 4x\sin 5x\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{6+\sqrt[3]{x}}.$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}dx.$

35. $\int x^2\sqrt{8-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{x^2+49}}{x^2}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-9x+20}}.$

Завдання 11.26

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{3x^7+4\sqrt[4]{x^3}-x^5}{x^6}dx.$
2. $\int \left(3x^9 - \frac{6}{\sqrt{x^2+1}} + 4^x\right)dx.$
3. $\int \frac{dx}{5x+18}.$
4. $\int \sin(x-9)\,dx.$
5. $\int \sqrt{4x+9}\,dx.$
6. $\int \frac{\arccos^7 8x}{\sqrt{1-64x^2}}dx.$
7. $\int \frac{e^{\frac{7}{x}}dx}{x^2}.$
8. $\int \frac{dx}{(9x-11)\ln(9x-11)}.$
9. $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{11x^2+1}}.$
11. $\int \frac{x\,dx}{5x^2+4}.$
12. $\int \frac{(3x-8)dx}{\sqrt{6-2x^2}}.$
13. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-3}.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3x-7}}.$
15. $\int \frac{(x-12)dx}{x^2+4x+7}.$
16. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{4+4x-3x^2}}.$
17. $\int \frac{x^5-2x+8}{x-2}dx.$
18. $\int \frac{x^2-33x-300}{(x+3)(x^2+x-30)}dx.$
19. $\int \frac{x^2-29x-180}{(x+5)(x^2-25)}dx.$
20. $\int \frac{2x^3+2x^2+25x-3}{x^4+11x^2+18}dx.$
21. $\int x^2\cos 13x\,dx.$
22. $\int (x-15)e^{2x}dx.$
23. $\int \ln(2x+4)\,dx.$
24. $\int x\,\mathrm{arctg}5x\,dx.$
25. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$
26. $\int 7^x\sin 6x\,dx.$
27. $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x-10}.$
28. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-2\sin^2 x+3}.$
29. $\int \sqrt[3]{\sin 4x-3}\cos 4x\,dx.$
30. $\int \sin^5 3x\cos^6 3x\,dx.$
31. $\int \sin^4 4x\cos^2 4x.$
32. $\int \sin 6x\cos 9x\;dx.$
33. $\int \frac{dx}{5x+\sqrt{x}}.$
34. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx.$
35. $\int x\sqrt{16-x^2}\,dx.$
36. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx.$
37. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx.$
38. $\int \frac{dx}{(x-6)\sqrt{x^2-4x-32}}.$

Завдання 11.27

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{6x^2-4\sqrt[7]{x^2}-5x^5}{x^4}dx.$

2. $\int (9x^7-2\sin x-4^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{5x+7}.$

4. $\int \sin(11x-3)\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(x+7)}}{x+7}dx.$

7. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg}7x}dx}{\sin^2 7x}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 3x\sqrt{1-9x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{6x^2+4}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{11x^2-2}.$

12. $\int \frac{(9x+4)dx}{\sqrt{6x^2+4}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-10x-5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+1}}.$

15. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{5x^2+5x+7}.$

16. $\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{6+2x-3x^2}}.$

17. $\int \frac{3x^4-2x^2+4-5}{x+3}dx.$

18. $\int \frac{5x^2+12x-62}{(x-1)(x^2+2x-8)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+13x-88}{(x-3)(x^2+2x-15)}dx.$

20. $\int \frac{8x^2-14x+13}{x^3-4x^2+x-4}dx.$

21. $\int (x^2+3)\sin 7x\,dx.$

22. $\int xe^{9x-4}dx.$

23. $\int x^3\ln(x-4)\,dx.$

24. $\int \arccos 3x\,dx.$

25. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

26. $\int e^{8x}\sin 2x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{5\cos x+2\sin x-7}.$

28. $\int \frac{dx}{6+3\cos^2 x-4\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(1+\cos x)^7}}dx.$

30. $\int \cos^5 9x\,dx.$

31. $\int \cos^6 x\,dx.$

32. $\int \sin 8x\sin 2x\;dx.$

33. $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x-3}}.$

34. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$

35. $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3}dx.$

37. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2-3x-18}}.$

Завдання 11.28

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\left(8x^3-\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{x^7}dx.$

2. $\int (5x^9+4\cos x+8^x)dx.$

3. $\int \frac{dx}{3x-17}.$

4. $\int \cos(4x-13)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x+4)^3}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{ctg}^3 7x}}{\sin^2 7x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x-8}}dx}{\sqrt{x-8}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin 2x}\sqrt{1-4x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2+15}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x^2}}.$

11. $\int \frac{(8x+9)dx}{5x^2-9}.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+11}}.$

13. $\int \frac{dx}{3x^2-6x-7}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+1}}.$

15. $\int \frac{(4x+1)dx}{2x^2+3x+9}.$

16. $\int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{1+4x-6x^2}}.$

17. $\int \frac{4x^3-x^2+2x-3}{x+5}dx.$

18. $\int \frac{4x^2-9x-292}{(x-4)(x^2+11x+28)}dx.$

19. $\int \frac{2x^2+58x-63}{x^3-7x^2}dx.$

20. $\int \frac{3x^3+3x^2+24x-25}{x^4+9x^2+8}dx.$

21. $\int x\sin 10x\,dx.$

22. $\int (4x^2+3)e^{2x}dx.$

23. $\int \ln(x+11)\,dx.$

24. $\int x\operatorname{arcctg}7x\,dx.$

25. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}dx.$

26. $\int e^{10x}\cos 5x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{2\cos x-9\sin x+2}.$

28. $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-2\sin^2 x-1}.$

29. $\int \frac{\cos 3x}{(7+2\sin 3x)^2}dx.$

30. $\int \sin^5 6x\cos^{12} 6x\,dx.$

31. $\int \sin^4 5x\,dx.$

32. $\int \sin 4x\cos 9x\,dx.$

33. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x-3}}.$

34. $\int \frac{x^2\sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{x+4}+1}dx.$

35. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^5}dx.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+64)^3}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-2x-24}}.$

Завдання 11.29

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^2+4\sqrt[3]{x^5}-7x^6}{x^4}dx.$

2. $\int \left(3x^8 - \frac{6}{\cos^2 x} - 4^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{7x+12}.$

4. $\int \sin(13x-3)\,dx.$

5. $\int \sqrt{4x+5}\,dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x-7)}}{3x-7}dx.$

7. $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 8x \sin^2 8x}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2-7}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{6x^2+9}.$

12. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{5-7x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{9x^2+2x+1}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x-x^2}}.$

15. $\int \frac{(3x+9)\,dx}{3x^2-4x-5}.$

16. $\int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{6x^2+4x-3}}.$

17. $\int \frac{x^5-x^2+4x+3}{x+2}dx.$

18. $\int \frac{9x^2+30x-138}{(x-2)(x^2+x-20)}dx.$

19. $\int \frac{-2x^2+18x+93}{(x+4)(x^2-3x-28)}dx.$

20. $\int \frac{5x^2+6x+5}{(x+5)(x^2+2x+5)}dx.$

21. $\int x^2\cos(x-6)\,dx.$

22. $\int (5x+4)e^{8x}dx.$

23. $\int x^3\ln(x+3)\,dx.$

24. $\int \arcsin 4x\;dx.$

25. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$

26. $\int e^{2x}\sin 6x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{6\cos x+7\sin x-4}.$

28. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\cos 5x}{(8-3\sin 5x)^2}dx.$

31. $\int \sin^7 2x\,dx.$

30. $\int \sin^2 7x\cos^2 7x\;dx.$

32. $\int \sin 4x\sin 13x\;dx.$

33. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}.$

34. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}+4}dx.$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx.$

36. $\int x\sqrt{x^2+25}\,dx.$

37. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

38. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-x-6}}.$

Завдання 11.30

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{9x^5-4\sqrt[7]{x^2}-2x^3}{x^4}dx$

2. $\int \left(5x^8+\frac{9}{\sin^2 x}+e^x\right)dx.$

3. $\int \frac{dx}{11x+7}.$

4. $\int \cos(2x-7)\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}.$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{\mathrm{ctg}^7 4x}}{\sin^2 4x}dx.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}+4}.$

8. $\int \frac{dx}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}.$

9. $\int \frac{dx}{9x^2-7}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+13}}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{7x^2+12}.$

12. $\int \frac{(9x+1)\,dx}{\sqrt{4-6x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+10x-13}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+4x+3}}.$

15. $\int \frac{(x-9)\,dx}{4x^2-4x+7}.$

16. $\int \frac{(6x+4)\,dx}{\sqrt{1+3x-2x^2}}.$

17. $\int \frac{x^3-x^2+5x-3}{x+4}dx.$

18. $\int \frac{5x^2-2x+57}{(x+1)(x^2-8x+7)}dx.$

19. $\int \frac{x^2+15x+45}{x(x^2+6x+9)}dx.$

20. $\int \frac{3x^2+74x+91}{(x-8)(x^2+6x+13)}dx.$

21. $\int (4x-8)\sin 3x\,dx.$

22. $\int x^2e^{2x-5}dx.$

23. $\int \ln(x+7)\,dx.$

24. $\int x\,\mathrm{arcctg}5x\,dx.$

25. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx.$

26. $\int e^{9x}\cos 4x\,dx.$

27. $\int \frac{dx}{7\cos x-\sin x-5}.$

28. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x-\sin^2 x}.$

29. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x-7}}dx.$

30. $\int \sin^4 4x\cos^3 4x\,dx.$

31. $\int \cos^6 x\;dx.$

32. $\int \sin 7x\cos 2x\;dx.$

33. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}.$

34. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+9}dx.$

35. $\int \sqrt{5-x^2}\,dx.$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^7}dx.$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+8)\sqrt{x^2+x-2}}.$

Тема 12 «Визначений інтеграл та його застосування»

В цьому розділі будемо працювати з визначеними, невласними інтегралами. За формулою Ньютона - Лейбніца навчимося обчислювати їх, спираючись на отримані навички у знаходженні первісних функцій. Ознайомимося з деякими застосуваннями визначних інтегралів під час розв'язання геометричних задач. Перед розв'язанням завдання пропонуємо повторити теоретичний матеріал, який міститься у розділах 8.9 - 8.15 Посібника «Вища математика. Модуль 2».

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{3x^3-6x^2+13}{x}dx$.

Розв'язання. За формулою Ньютона - Лейбніца (8.44):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Для того, щоб обчислити визначені інтеграли, ми спочатку повинні знайти первісні. У цьому прикладі ми це можемо зробити миттєво за таблицею невизначених інтегралів:

$$\int_1^3 \frac{3x^3-6x^2+13}{x}dx = \int_1^3\left(3x^2-6x+\frac{13}{x}\right)dx =$$
$$= (x^3-3x^2+13\ln x)\Big|_1^3 = 27-27+13\ln 3-1+3-13\ln 1 =$$
$$= 2+13\ln 3;$$

б) $\int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x+4}dx$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти первісну, необхідно виконати заміну змінної. Звернемо вашу увагу на те, що процедура заміни змінної у визначеному інтегралі відрізняється від такої у невизначеному, а саме: у разі введення нової змінної ми зобов'язані замінити й границі інтегрування, обчислити первісні з новими границями, до старої змінної, зрозуміло, повертатися не потрібно.

$$\int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x+4}dx = \begin{bmatrix} u = e^x + 4 \\ du = e^x dx \\ u_н = e^0 + 4 = 1 + 4 = 5 \\ u_в = e^{\ln 5} + 4 = 5 + 4 = 9 \end{bmatrix} = \int_5^9 \sqrt{u}du =$$

$$= \int_5^9 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_5^9 = \frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\Bigg|_5^9 = \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 5\sqrt{5}\right).$$

в) $\int_{-4}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+20}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат, знайдемо первісну, скористаємося формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_{-4}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+20} = \int_{-4}^{0}\frac{dx}{(x^2+8x+16)-16+20} = \int_{-4}^{0}\frac{dx}{(x+4)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}atcrg\frac{x+4}{2}\Bigg|_{-4}^{0} = \frac{1}{2}(atcrg2 - arctg0) = \frac{1}{2}arctg2;$$

г) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами (8.48):

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x \\ dv = dx \\ du = 2\ln x \cdot \frac{dx}{x} \\ v = x \end{bmatrix} = x \cdot \ln^2 x\,\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2\ln x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x \cdot \ln^2 x\,\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{bmatrix} = e \cdot \ln^2 e -$$

$$-1 \cdot \ln^2 1 - 2\left(x \cdot \ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x}\right) = e - 2e \cdot \ln e +$$

$$+2 \cdot \ln 1 + 2x\,\Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання. Інтеграл невласний. Функція потерпає розрив на верхній границі. Для знаходження первісної, виділимо повний квадрат у квадратному тричлені знаменника:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4x+4)-4+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x-2 \\ du = dx \\ u_{\text{н}} = 0-2 = -2 \\ u_{\text{в}} = 1-2 = -1 \end{bmatrix} = \int_{-2}^{-1} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \Bigg|_{-2}^{-1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{-1-\varepsilon-1}{-1-\varepsilon+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right| = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\right| - \frac{1}{2}\ln 3 =$$

$$= \infty - \frac{1}{2}\ln 3 = \infty.$$

$\Rightarrow$ невласний інтеграл розбігається;

б) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. Інтеграл невласний із нескінченими границями. Для знаходження первісної скористаємося тригонометричною підстановкою:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{\sin t} \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t} \\ \text{н:} \quad \sqrt{2} = \frac{1}{\sin t}; \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad t_{\text{н}} = \frac{\pi}{4} \\ \text{в:} \quad \infty = \frac{1}{\sin t}; \quad \sin t = \frac{1}{\infty} = 0; \quad t_{\text{в}} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}} = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Ми отримали кінцеве значення $\Rightarrow$ невласний інтеграл збігається.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4 - 3x$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 12.1). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - 3x; \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2 = 4 - 3x; \\ &x^2 + 3x - 4 = 0; \\ &x_1 = -4; \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

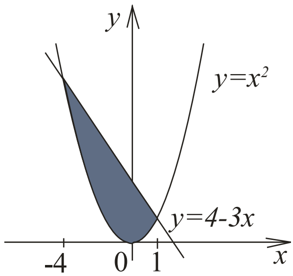

Рисунок 12.1.

Отже, точки перетину $x_1 = -4$ і $x_2 = 1$.

Обчислимо площу за формулою (8.58):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx =$$
$$= \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx =$$
$$= \left(4x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$
$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{125}{6}\,(\text{од}^2);$$

б) обмеженою першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ та прямою $y \geq 1$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 12.2).

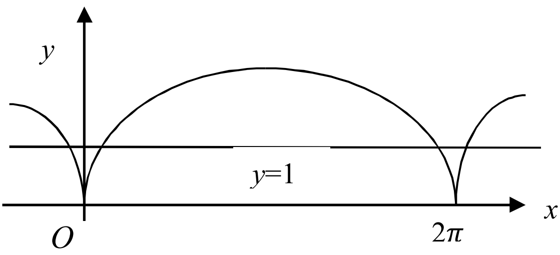

Рисунок 12.2.

Знайдемо точки перетину циклоїди та прямої. Для цього розв'яжемо таку систему:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \Rightarrow \ 1 - \cos t = 1; \ \ \cos t = 0; \ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Скористаємося формулою (8.64). Для цього знайдемо похідну:

$$x'_t = (t - \sin t)' = 1 - \cos t,$$

підставимо у формулу:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dt - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - 2 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin 3\pi - \sin \pi)\right) = \pi - 2(-1 - 1) + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 4 \ (\text{од}^2);$$

в) кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.

Розв’язання. Побудуємо фігуру (рис. 12.3):

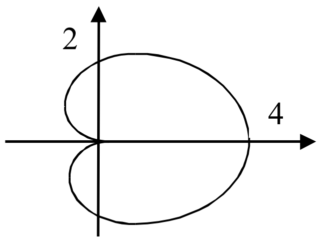

Рисунок 12.3.

та обчислимо площу за формулою (8.61):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \int_{0}^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi}d\varphi +$$
$$+2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 2\varphi\,\Big|_0^{2\pi} +$$
$$+2\sin\varphi\,\Big|_0^{2\pi} + \left(\varphi+\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi+2\pi = 6\pi\ (\text{од}^2).$$

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\arcsin e^{-x}$ між точками з абсцисами $0\le x\le 1$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (8.63). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}};$$
$$1+(y')^2 = 1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1-e^{-2x}+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{-2x}}.$$
$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \left[\begin{array}{c} u^2 = 1-e^{-2x} \\ 2udu = 2e^{-2x}dx \\ dx = \frac{udu}{e^{-2x}} = \frac{udu}{1-u^2} \\ u_{\text{н}} = 1-1=0 \\ u_{\text{в}} = \sqrt{1-e^{-2}} \end{array}\right] =$$
$$= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}}\frac{udu}{u(1-u^2)} = -\int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}}\frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\,\Big|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{-2}}-1}{\sqrt{1-e^{-2}}+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{-2}}+1}{\sqrt{1-e^{-2}}-1}\right|\ (\text{од.});$$

б) кола $x=5\cos t$, $y=5\sin t$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги скористаємося формулою (8.64). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$x'(t) = -5\sin t,\quad y'(t)=5\cos t;$$
$$\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2 = (-5\sin t)^2+(5\cos t)^2 = 25;$$
$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt = 5\int_0^{2\pi}dt = 5t\,\Big|_0^{2\pi} = 10\pi\ (\text{од.});$$

в) лінії $\rho = 2\sin^3\frac{\varphi}{3}$ між точками $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання: Для обчислення довжини дуги скористаємося формулою (8.65). Для цього знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення:

$$\rho' = 2\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3};$$

$$(\rho')^2 + \rho^2 = \left(2\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2 + \left(2\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2 =$$

$$= 4\sin^6\frac{\varphi}{3} + 4\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3} = 4\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 4\sin^4\frac{\varphi}{3};$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4}\ (\text{од.})$$

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = e^x,\ y = e^{\frac{x}{2}},\ x = \ln 2$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{\frac{x}{2}} \end{cases}; \qquad e^x = e^{\frac{x}{2}}; \quad e^x - e^{\frac{x}{2}} = 0; \quad e^x\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0;$$

$$e^x \neq 0; \quad 1 - e^{-\frac{x}{2}} = 0; \quad -\frac{x}{2} = 0; \quad x = 0.$$

За формулою (8.68) маємо:

$$V = \pi\int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx = \pi\int_0^{\ln 2}(e^{2x} - e^x)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \pi\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2} - e^{\ln 2} - \frac{1}{2} + 1\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot 4 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\text{од}^3).$$

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ навколо осі Oy.

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (8.71). Для цього знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення:

$$x_t' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t);$$
$$y_t' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t);$$
$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = e^{2t}[(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2] =$$
$$= e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2\sin t \cos t +$$
$$+ \sin^2 t) = 2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{2t}.$$

Підставимо у формулу:

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt =$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \cdot \sqrt{2}e^t dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t\, dt =$$

для знаходження первісної потрібно інтегрувати цей вираз частинами двічі (це «повернений» інтеграл)

$$= \begin{bmatrix} u = e^{2t} & du = 2e^{2t}dt \\ dv = \sin t\, dt & v = -\cos t \end{bmatrix} = -2\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \cdot \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$
$$+4\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt = \begin{bmatrix} u = e^{2t} & du = 2e^{2t}dt \\ dv = \cos t\, dt & v = \sin t \end{bmatrix} =$$
$$= 2\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t\, dt =$$
$$= 6\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t\, dt;$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно невідомого інтегралу. Для цього перепишемо

$Q_y = 6\sqrt{2}\pi - 4Q_y;$ $\qquad$ $5Q_y = 6\sqrt{2}\pi;$

звідси маємо

$Q_y = \frac{6\sqrt{2}\pi}{5}$ (од^2).

Завдання 12.1

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \left(x^5 - 7\cos x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5}$;

в) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_0^1 x \ln x\,dx$.

3. Обчислити площу:

а) фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$;

б) астроїди $y = \cos^3 t$; $y = \sin^3 t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) фігури, обмеженої лінією $\rho = 2\mathrm{tg}\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0{,}0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$;

б) лінії $x = \cos^5 t$; $y = \sin^5 t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ при $\varphi \in \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 4x$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 8x$ навколо осі Ox від вершини до точки з абсцисою $x = 6$.

Завдання 12.2

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-5}^{0}\left(x^2-4\sin x+\frac{2}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$; б) $\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)dx}{x^2+4x-5}$;

в) $\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\sin 3x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx$; б) $\int_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=x-6$;

б) еліпса $x=\cos t\,,\;\; y=2\sin t$;

в) обмеженої лінією $\rho=3\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln\sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

б) евольвенти кола $x=5(\cos t+t\sin t)$, $y=5(\sin t-t\cos t)$ (від $t_1=0$ до $t_2=\pi$);

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi=1$ (від $\varphi_1=\frac{3}{4}$ до $\varphi_2=\frac{4}{3}$).

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^5,\;\; y=\sqrt{x}$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y=x^3$ при $x\in\left[0;\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.3

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-2}^{7}\left(x^6-\frac{5}{x^2}+\frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

в) $\int_{4\sqrt{2}}^{8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$; г) $\int_0^2 \ln(3x+1)\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; б) $\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $xy=1$ і прямою $x=4$;

б) петлі лінії $x=3t^2$, $y=3t-t^3$;

в) обмеженої лінією $\rho=4\operatorname{tg}\varphi$ і прямою $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln\frac{6}{x^2-1}$ між точками з абсцисами $2\le x\le 3$;

б) трактриси $x=2\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y=2\sin t$ між точками з $t\in\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{3}\right]$;

в) лінії $\rho=6\sin^3\frac{\varphi}{3}$ між точками з $\varphi\in\left[0;\,\frac{3\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=3x+4$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $9y^2=x(3-x)^2$ при $x\in[0;3]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.4

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^4 \left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sin^2 x} - e^x\right) dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$; г) $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$;

б) астроїди $x = 4\cos^3 t;\ y = 3\sin^3 t$;

в) логарифмічної спіралі $\rho = 4e^{5\varphi}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{1}{5}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 4 + \ln \cos x$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) петлі $x = t^2;\quad y = t - \frac{t^3}{3}$;

в) лінії $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = 2x + 3$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^2;\ xy - 1;\ x = 0;\ y = 4$ навколо осі Oy.

Завдання 12.5

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{1}^{2} \frac{4x+2}{2x-1} dx$;

б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

в) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln x - 1}} dx$;

г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\sin 3x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$;

б) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис;

б) еліпса $x = 4\cos t\,;\quad y = 8\sin t$;

в) обмеженої лінію $\rho = 5\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $-2 \le x \le 2$;

б) арки циклоїди $x = 4(t - \sin t);\;\; y = 4(1 - \cos t)$;

в) лінії $\rho = 6\sin^4 \frac{\varphi}{4}$ між точками з $\varphi \in [0; \pi]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = y + 4,\; y = 0$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кола $x^2 + y^2 = 9$ при $y \in [-2; 1]$ навколо осі Oy.

Завдання 12.6

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 (e^x+5)^4 e^x dx$;   б) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

в) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;   г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$;   б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $9y = x^2$ і $y^2 = 9x$;

б) астроїди $y = 7\cos^3 t;\ y = 2\sin^3 t$;

в) обмеженої трактрисою $x = 3\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right);\ \ y = 3\sin t$ та віссю абсцис.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками з абсцисами $1 \le x \le 9$;

б) кола $x = 9\cos t\,;\quad y = 9\sin t$;

в) лінії $\rho = 4(1-\cos\varphi)$ при $\varphi \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = \frac{x^2+1}{2}$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = 6x - x^2;\quad x + y - 6 = 0$ навколо осі Ox.

Завдання 12.7

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2}$;

б) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

в) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin \pi x} \cos \pi x\,dx$;

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

б) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$;

б) петлі $x = t^2 - 1$; $y = t^3 - t$;

в) обмеженої лінією $\rho = 2\cos 5\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

б) лінії $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ від точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = \pi$;

в) кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$ при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 16x$, $y = 4x$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^3$, $x = 0$, $xy = 1$, $y = 2$ навколо осі Ox.

Завдання 12.8

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x\, dx$; г) $\int_0^1 x \ln(x+3)\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = x^4 - 2x^2$ і $y = 0$;

б) кардіоїди $x = 5(2\cos t - \cos 2t), y = 5(2\sin t - \sin 2t)$;

в) обмеженої лінією $\rho = 4\operatorname{tg}\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 2\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) евольвенти кола $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$

(від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$);

в) лінії $\rho = 7\sin^5\frac{\varphi}{5}$ (від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$).

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^3,\ \ y = \sqrt{x}$ навколо осі Ox.

Завдання 12.9

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

б) $\int_1^2 \frac{3x^4-2x\sqrt{x}+9}{x} dx$;

в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3xdx}{1+9x^2}$;

б) $\int_0^1 \ln x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ і прямими $y = 0,\ \ x = 1,$ $x = 3$;

б) астроїди $y = 4\cos^3 t;\ y = 6\sin^3 t$;

в) логарифмічної спіралі $\rho = 7e^{5\varphi}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3}{5}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = x^{\frac{3}{2}}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) лінії $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$; $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

в) кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = 4x - x^2$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $x = e^t \sin t,\ \ y = e^t \cos t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$ навколо осі Oy.

Завдання 12.10

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^4 \left(x^8 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2+1}\right) dx$; б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx$; г) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^4+1}$; б) $\int_{-7}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 3x^3 - x$ і $y = 2x$;

б) обмеженої однією аркою циклоїди $x = 3(t - \sin t)$; $y = 3(1 - \cos t)$;

в) лемніскати Бернулі $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$, попередньо треба перейти до полярної системи координат.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0,0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$;

б) евольвенти кола $x = 5(\cos t + t\sin t)$, $y = 5(\sin t - t\cos t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{4}$);

в) лінії $\rho = 5\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$).

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 6,\ y = 1,\ y = 6,\ x = 0$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням цепної лінії $y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$ між точками $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ навколо осі Ox.

Завдання 12.11

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_2^5 \frac{2x-7}{x+5}dx$; б) $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$; г) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{e^4}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-3)^3}$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 3x + 4$;

б) кардіоїди $x = 2\cos t - \cos 2t\,, y = 2\sin t - \sin 2t$

в) обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$. Перед інтегруванням перейти до полярної системи координат.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{1}{2}$;

б) трактриси $x = 2\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = 2\sin t$ між точками з $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від точки $\varphi_1 = \frac{2}{3}$ до точки $\varphi_2 = \frac{3}{2}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $3y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = 2\sqrt{x}$ при $x \in [1; 3]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.12

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^9 \frac{\left(5-3x^3\right)^2}{\sqrt{x}}dx$;   б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$;   г) $\int_1^e x^4 \ln x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$;   б) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+6}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ і $y = x^5$;

б) астроїди $y = \cos^3 t;\ y = \sin^3 t$;

в) равликом Паскаля $\rho = 4(2 + \cos\varphi)$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln\frac{5}{x^2-1}$ між точками з абсцисами $2 \leq x \leq 5$;

б) лінії $x = e^t(\cos t + \sin t)$; $y = e^t(\cos t - \sin t)$ від точки $t_1 = 0$ до точки $t_1 = \frac{\pi}{4}$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від точки $\varphi_1 = \frac{2}{3}$ до точки $\varphi_1 = \frac{3}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $(0; 0)$ до точки $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ навколо осі Ox.

Завдання 12.13

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2-1} dx$; б) $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y^2 = 4 + x$ і прямою $x = 2$;

б) кардіоїди $x = 4\cos t - 2\cos 2t\,, y = 4\sin t - 2\sin 2t$;

в) лінії $\rho = 7\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $\ln 3 \le x \le \ln 8$;

б) лінії $x = 4\cos^5 t;\ y = 4\sin^5 t$ між точками з $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

в) архимедової спіралі $\rho = 7\varphi$ від початку до кінця першого витка.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ y = 2$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 12x$ від вершини до точки з абсцисою $x = 9$ навколо осі Ox.

Завдання 12.14

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$;

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

в) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt{x+3}-1}$;

г) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x+3)^4}$;

б) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;

б) еліпса $x = 2\cos t\,, y = \sin t$.

в) фігури $\rho = 4\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) евольвенти кола $x = 7(\cos t + t\sin t)$, $y = 7(\sin t - t\cos t)$ при $t \in [0; \pi]$;

в) спіралі $\rho = 6\varphi$ при $t \in [0; 5]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні катеноїда, утвореного обертанням цепної лінії $y = \frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}}\right)$ навколо осі Ox при $0 \le x \le 5$.

Завдання 12.15

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int_{3}^{5} \frac{dx}{x^3-4x}$;

в) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty} \frac{2x^3 dx}{\sqrt{x^4+16}}$; б) $\int_{0}^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-5x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 2x + 3$;

б) обмеженої аркою циклоїди $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ та віссю абсцис;

в) обмеженої гіперболічною спіраллю $\rho\varphi = 3$ при $\varphi \in [0; 1]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 5 + \ln \sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) лінії $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) кардіоїди $\rho = 8(1 + \cos \varphi)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 3 - 2x$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $x = 0$ до точки $x = \frac{\pi}{6}$ навколо осі Ox.

Завдання 12.16

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

б) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

в) $\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

г) $\int_0^{2} x^2 e^{-2x} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$;

б) $\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt{10-x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 0$;

б) астроїди $x = 7\cos^3 t\,, y = 5\sin^3 t$;

в) обмеженої лінією $\rho = \operatorname{tg}\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{1}{8}$;

б) трактриси $x = 5\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = 5\sin t$ між точками з $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$;

в) лінії $\rho = 2\sin^4\frac{\varphi}{4}$ між точками з $0 \le \varphi \le \frac{4\pi}{3}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox лінії $x = 2e^t \sin t\,,\ y = 2e^t \cos t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 12.17

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

б) $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$;

в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4x}$;

г) $\int_{-2}^2 (x-1)\sin\pi x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \operatorname{arcctg} x\,dx$;

б) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{(x+3)^4}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$ і $y=0$;

б) петлі лінії $x=3t^2,\ y=3t-t^3$;

в) обмеженої лінією $\rho^2=4\cos 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0\le x\le 9$;

б) лінії $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ від $t=0$ до $t=\pi$;

в) другого витка архімедової спіралі $\rho=8\varphi$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x=y^2,\ xy=8,\ x=0,\ y=4$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням одної арки синусоїди $y=\sin x$ навколо осі абсцис.

Завдання 12.18

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^3}}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$;

в) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$; г) $\int_{-1}^1 x^2e^{-x}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+2x^2}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$;

б) петлі цепної лінії $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t$;

в) обмеженої лінією $\rho = 5\sin 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \le x \le \sqrt{3}$;

б) лінії $x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від $\varphi = \frac{5}{7}$ до $\varphi = \frac{7}{5}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sin x\,,\ y = 0$ при $0 \le x \le \pi$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис петлі лінії $9y^2 = x(3-x)^2$.

Завдання 12.19

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$;

в) $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$;

б) $\int_{-1}^{0} \ln(x+1)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 2 - x^4$ і $y = x^2$;

б) астроїди $x = 4\cos^3 t\,, y = \sin^3 t$;

в) обмеженої равликом Паскаля $\rho = 6(2 + \cos\varphi)$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = 5x^3$ між точкамиз абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) евольвенти кола $x = 3(\cos t + t\sin t),\ y = 3(\sin t - t\cos t)$ при $t \in [0; \pi]$;

в) лінії $\rho = 2\sin^6\frac{\varphi}{6}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{6x},\ y = \sqrt{16 - x^2},\ x = 0$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кола $x^2 + y^2 = 9$ при $x \in [-2; 1]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.20

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+4x}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$;

в) $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}$;

г) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

б) $\int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y=(x+1)^2$ і $y^2=x+1$;

б) обмеженої лінією $x=5e^t\sin t$, $y=5e^t\cos t$ між точками з $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) обмеженої лінією $\rho=\cos 5\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y=\ln\cos x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$;

б) астроїди $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$;

в) кардіоїди $\rho=7(1+\cos\varphi)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{2}x^2-2x$, $y=0$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кола $x=5\cos t$, $y=5\sin t$ навколо осі ординат.

Завдання 12.21

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^9 \left(x^8 + 2\sin x - \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x \, dx$; г) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y^2 = 16x$ і прямою $y = 4x$;

б) кардіоїди $x = 6\cos t - 3\cos 2t\,, y = 6\sin t - 3\sin 2t$;

в) між першим та другим витками спіралі Архімеда $\rho = 8\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-5)^3}$ між точками з абсцисами $5 \le x \le 9$;

б) кола $x = 4\cos t\,, y = 4\sin t$;

в) лінії $\rho = 5\sin^3\frac{\varphi}{3}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x-1},\ y = 0,\ x = 5$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ при $x \in [0; 1]$ навколо осі абсцис.

Завдання 12.22

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-3x}$;

б) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}}$;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4+5x)^3}}$;

г) $\int_0^2 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{1-\ln x}{x} dx$;

б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

б) обмеженої однією аркою циклоїди $x = 6(t - \sin t)$,

$y = 6(1 - \cos t)$ і віссю ординат;

в) обмеженої лінією $\rho = 4 \operatorname{tg} \varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 1$;

б) петлі лінії $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$;

в) лінії $\rho = 3 \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ навколо осі Oy.

Завдання 12.23

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\, x\, dx$;

в) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$; г) $\int_{0}^{2} (x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 3 - 2x$;

б) обмеженої лінією $x = 7\cos^5 t\,, y = 7\sin^5 t$;

в) третього витка архімедової спіралі $\rho = 3\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 4\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 9$;

б) евольвенти кола $x = 5(\cos t + t\sin t)$, $y = 5(\sin t - t\cos t)$ при $t \in [0;\pi]$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ при $\frac{2}{5} \le \varphi \le \frac{5}{2}$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$, $y = x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y = x^3$ при $x \in [0; 1]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.24

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^5 - \frac{7}{x^2}\right) dx$;

б) $\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8} dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$;

г) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{12-3x}}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 1 - x^2$, $y = x$ і $y = 0$;

б) обмеженої лінією $x = 2e^t \sin t$, $y = 2e^t \cos t$ між точками з $0 \le t \le \pi$;

в) обмеженої лінією $\rho = 5\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{2}$

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ між точками з абсцисами $-1 \le x \le 1$;

б) лінії $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$ від $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$;

в) лінії $\rho = 2\sin^6 \frac{\varphi}{6}$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = 3\pi$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x,\ x^2 = 9y$ навколо осі Oy.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$ навколо осі ординат.

Завдання 12.25

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$;

б) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

в) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\sin x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty \frac{dx}{(4x+3)^2}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = 3 + 2x - x^2$ і прямою $y = x + 1$;

б) еліпса $x = 6\cos t\,, y = 8\sin t$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 4$ при $\varphi \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{1}{5}$;

б) трактриси $x = 4\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = 4\sin t$ між точками

з $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

в) кардіоїди $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 4$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ між точками $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ навколо осі Ox.

Завдання 12.26

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$;

б) $\int_1^2 \frac{5x^3-8x+4}{x^2}dx$;

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

г) $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;

б) обмеженої однією аркою циклоїди $x = 3(t - \sin t)$,
$y = 3(1 - \cos t)$ та віссю ординат;

в) обмеженої лінією $\rho = 8\cos 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \le x \le \sqrt{3}$;

б) лінії $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками з $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;

в) лінії $\rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}$ між точками з $\varphi \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням косинусоїди $y = \cos x$ навколо осі Ox.

Завдання 12.27

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+4x}$;

б) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x^2)\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$;

б) $\int_1^2 x\ln(x-1)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y=-x^2+4x-3$ і прямою $y=0$;

б) обмеженої однією аркою циклоїди $x=5(t-\sin t)$,

$y=5(1-\cos t)$ і віссю ординат;

в) обмеженої логарифмічною спіраллю $\rho=4e^{3\varphi}$ і прямою

$\varphi=\frac{1}{3}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2=x^3$ між точками з абсцисами $0\le x\le 4$;

б) евольвенти кола $x=3(\cos t+t\sin t)$, $y=3(\sin t-t\cos t)$

при $t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$;

в) лінії $\rho=2\sin^4\frac{\varphi}{4}$ між точками з $\varphi\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $xy=8$, $y=0$, $x=4$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy лінії $x=5e^t\sin t$, $y=5e^t\cos t$ при $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 12.28

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^7 \frac{x^3}{\sqrt[3]{7+x^2}}dx$;

б) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-2x}$;

в) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{(5x-3)^2}$;

б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $3y = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = 2$;

б) петлі лінії $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t$;

в) обмеженої равликом Паскаля $\rho = 6(2 + \cos\varphi)$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = 8 + \ln\cos x$ між точками з абсцисами $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) астроїди $x = 8\cos^3 t\,, y = 8\sin^3 t$;

в) архімедової спіралі $\rho = 2\varphi$ від початку до кінця першого витка.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ y = 0,\ x = 3,\ x = 12$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $y = \mathrm{ctg}\,x$ від точки $x = \frac{\pi}{6}$ до точки $x = \frac{\pi}{4}$ навколо осі Ox.

Завдання 12.29

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

в) $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x} dx$; г) $\int_{0}^{\pi} x \sin\frac{x}{2} dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{0}^{\infty} x\, e^{-3x} dx$; б) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x(x-4)^2}$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = 0$;

б) кардіоїди $x = 8\cos t - 4\cos 2t\,, y = 8\sin t - 4\sin 2t$;

в) логарифмічної спіралі $\rho = 6e^{4\varphi}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 4$;

б) кола $x = 5\cos t\,, y = 5\sin t$;

в) гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ при $\varphi \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням цепної лінії $y = \frac{7}{2}\left(e^{\frac{x}{7}} + e^{-\frac{x}{7}}\right)$ навколо осі Ox.

Завдання 12.30

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^9 \left(2x^5 + \frac{9}{\sqrt{x}}\right) dx$;

б) $\int_0^\pi \cos^4 \frac{x}{4} dx$;

в) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^\infty e^{\sqrt{x}} dx$;

б) $\int_3^4 x\ln(x-2)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури:

а) обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 2$;

б) кола $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$;

в) обмеженої лінією $\rho = 6\,\mathrm{tg}\,\varphi$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

4. Обчислити довжину дуги:

а) кривої $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $0 \le x \le 8$;

б) трактриси $x = 3\left(\cos t + \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = 3\sin t$ між точками з $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$;

в) кардіоїди $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$.

5. Обчислити об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ навколо осі Ox.

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ при $x \in [0; 2]$ навколо осі абсцис.

Тема 13 «Функції декількох змінних»

Цей розділ присвячено функції декількох змінних. Ми навчимося знаходити похідні та диференціал функцій декількох змінних, застосовувати їх у розв'язанні прикладних задач. Будемо досліджувати функції на екстремум, знаходити найбільше та найменше значення в замкненій області. Перед розв'язанням завдання пропонуємо повторити теоретичний матеріал, який міститься у розділі 9 Посібника «Вища математика. Модуль 2».

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{3x^2+5y^2}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. Функція визначена на координатній площині крім точок, які обертають знаменник дробі к нуль, тому $x^2 - y^2 \neq 0$; $(x-y)(x+y) \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-y \neq 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y \neq x \\ y \neq -x \end{cases}$. Звідси робимо висновок, що функція визначена на всій координатній площині за винятком точок, що належать прямим $y = x$ та $y = -x$ (бісектрисам першого-третього та другого-четвертого координатних кутів. Побудуємо область визначення (рис. 13.1):

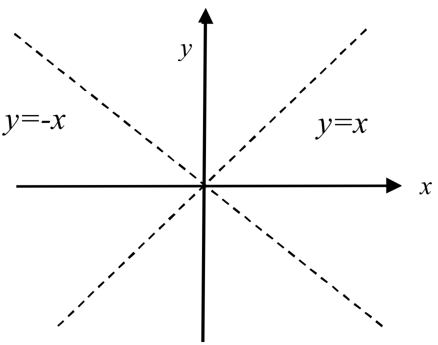

Рисунок 13.1.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=8z$.

Розв'язання. Спробуємо розрізати задану поверхню площинами $x=const$. Маємо $C+\frac{y^2}{4}=8z$. При $x=0$ маємо параболу $\frac{y^2}{4}=8z$ або $z=\frac{y^2}{32}$ з вершиною в початку координат, гілки параболи спрямлені у бік зростання ординати симетрично відносно осі ординат. За всіма іншими значеннями $x=const$, які відрізняються від нуля теж маємо параболу, вершина якої зміщається у бік зростання аплікати. У разі «розрізання» поверхні площинами $y=const$ приходимо к аналогічним висновкам. Якщо спробуємо розрізати поверхню площинами $z=const$ (зауважимо, що мають сенс тільки додатні значення аплікати), отримаємо еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=8C$ або $\frac{x^2}{72C}+\frac{y^2}{32C}=1$ з великою віссю, яка співпадає з віссю абсцис, і малою віссю, яка співпадає з віссю ординат. При $z=0$ маємо точку – початок координат. Отже дослідження заданої поверхні дозволяє зробити висновок, що нам заданий еліптичний параболоїд. Побудуємо його (рис. 13.2):

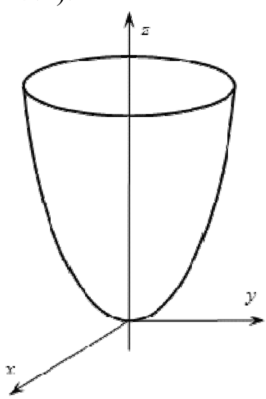

Рисунок 13.2.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x+y^3}$. Записати повний диференціал функції.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції двох змінних. Вважаючи y сталою, знайдемо похідну по змінній x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x+y^3}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x+y^3}\right)'_x = \frac{1}{1+x+y^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y^3}}.$$

Вважаючи x сталою, знайдемо похідну по змінній y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x+y^3}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x+y^3}\right)'_y = \frac{1}{1+x+y^3} \cdot \frac{3y^2}{\sqrt{x+y^3}}.$$

Запишемо частинні диференціали за формулою (9.4):

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{1}{1+x+y^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y^3}} dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{1+x+y^3} \cdot \frac{3y^2}{\sqrt{x+y^3}} dy.$$

Повний диференціал запишемо за формулою (9.7):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{dx + 3y^2 dy}{(1+x+y^3)\sqrt{x+y^3}}.$$

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z) = (2x - z)x^y$ у точці $M(1;3;-5)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції трьох змінних:

$$f'_x = (2x - z)'_x \cdot x^y + (2x - z) \cdot (x^y)'_x = 2x^y + (2x - z) \cdot yx^{y-1};$$

$$f'_y = (2x - z)x^y \ln x;$$

$$f'_z = -x^y.$$

Обчислимо значення отриманих похідних в заданій точці:

$$f'_x\Big|_M = 2 \cdot 1^3 + (2 \cdot 1 + 5) \cdot 3 \cdot 1^{3-1} = 2 + 21 = 23;$$

$$f'_y\Big|_M = (2 \cdot 1 + 5) \cdot 1^3 \cdot \ln 1 = 0;$$

$$f'_z\Big|_M = -1^3 = -1.$$

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \arcsin(3u + v)$, де $u = e^{xy}$; $v = x^3 + \sqrt[3]{y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(1; -8)$.

Розв'язання. Нам необхідно пригадати формули (9.11), (9.12)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Знайдемо частинні похідні функції z по змінним u і v та частинні похідні функцій u і v по змінним x і y:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} \cdot 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1-(3u+v)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot e^{xy}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot e^{xy};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

Підставимо у формули

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3ye^{xy}}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} = \frac{3ye^{xy}+3x^2}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} = \frac{3ye^{xy}+3x^2}{\sqrt{1-\left(3e^{xy}+x^3+\sqrt[3]{y}\right)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xe^{xy}}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3u+v)^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{9x\sqrt[3]{y^2}e^{xy}+1}{3\sqrt[3]{y^2}\sqrt{1-(3u+v)^2}} =$$

$$= \frac{9x\sqrt[3]{y^2}e^{xy}+1}{3\sqrt[3]{y^2}\sqrt{1-\left(3e^{xy}+x^3+\sqrt[3]{y}\right)^2}}.$$

Обчислимо значення отриманих похідних складної функції в точці $A(1; -8)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \frac{3\cdot(-8)e^{1\cdot(-8)}+3\cdot 1^2}{\sqrt{1-\left(3e^{1\cdot(-8)}+1^3+\sqrt[3]{-8}\right)^2}} = \frac{3-24e^{-8}}{\sqrt{1-(3e^{-8}-1)^2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \frac{9\cdot 1\sqrt[3]{(-8)^2}\cdot e^{1\cdot(-8)}+1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}\cdot\sqrt{1-\left(3e^{1\cdot(-8)}+1^3+\sqrt[3]{-8}\right)^2}} = \frac{36e^{-8}+1}{12\sqrt{1-(3e^{-8}-1)^2}}.$$

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $y\sin^2 x + x\cos^2 y - 4xyz^5 = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; 2\right)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами (9.14), для цього обчислимо $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$:

$$F'_x(x,y,z) = 2y\sin x \cdot \cos x + \cos^2 y - 4yz^5 = \\ = y\sin 2x + \cos^2 y - 4yz^5;$$

$$F'_y(x,y,z) = \sin^2 x - 2x\cos y \cdot \sin y - 4xz^5 = \\ = \sin^2 x - x\sin 2y - 4xz^5;$$

$$F'_z(x,y,z) = -20xyz^4;$$

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{y\sin 2x+\cos^2 y-4yz^5}{-20xyz^4} = \frac{y\sin 2x+\cos^2 y-4yz^5}{20xyz^4};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{\sin^2 x-x\sin 2y-4xz^5}{-20xyz^4} = \frac{\sin^2 x-x\sin 2y-4xz^5}{20xyz^4}.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці M:

$$z'_x\big|_M = \frac{\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\frac{\pi}{4}-4\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2^5}{20\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2^4} = \frac{0+\frac{1}{2}-32\pi}{40\pi^2} = \frac{1-64\pi}{80\pi^2};$$

$$z'_y\big|_M = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2^5}{20\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2^4} = \frac{1-\frac{\pi}{2}-64\pi}{40\pi^2} = \frac{2-129\pi}{80\pi^2}.$$

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5y^4)^3}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{x^2+5y^4}\cdot(x^2+5y^4)'_x = 2x\sqrt{x^2+5y^4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{x^2+5y^4}\cdot(x^2+5y^4)'_y = 20y^3\sqrt{x^2+5y^4}$$

Скористаємося формулами (9.15) для знаходження частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2\sqrt{x^2+5y^4} + 2x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5y^4}} = \frac{2(2x^2+5y^4)}{\sqrt{x^2+5y^4}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x\frac{20y^3}{2\sqrt{x^2+5y^4}} = \frac{20xy^3}{\sqrt{x^2+5y^4}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 20y^3\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5y^4}} = \frac{20xy^3}{\sqrt{x^2+5y^4}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 60y^2\sqrt{x^2+5y^4} + 20y^3\frac{20y^3}{2\sqrt{x^2+5y^4}} = \\ = \frac{20y^2(3x^2+25y^4)}{\sqrt{x^2+5y^4}}.$$

Ми переконалися, що мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $u = \frac{y}{y^2-4x^2}$ рівнянню $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні першого та другого порядку функції u:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \left(-\frac{1}{(y^2-4x^2)^2}\right) \cdot (-8x) = \frac{8xy}{(y^2-4x^2)^2}$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1\cdot(y^2-4x^2)-y\cdot 2y}{(y^2-4x^2)^2} = -\frac{4x^2+y^2}{(y^2-4x^2)^2}$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{8y(y^2-4x^2)^2-8xy\cdot 2(y^2-4x^2)\cdot(-8x)}{(y^2-4x^2)^4} = \frac{8y(y^2-4x^2)(y^2-4x^2+16x^2)}{(y^2-4x^2)^4} =$

$= \frac{8y(y^2+12x^2)}{(y^2-4x^2)^3}$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y(y^2-4x^2)^2-(4x^2+y^2)\cdot 2(y^2-4x^2)\cdot 2y}{(y^2-4x^2)^4} =$

$= -\frac{2y(y^2-4x^2)(y^2-4x^2-8x^2-2y^2)}{(y^2-4x^2)^4} = \frac{2y(y^2+12x^2)}{(y^2-4x^2)^3}$

і підставимо у задане рівняння: $\frac{8y(y^2+12x^2)}{(y^2-4x^2)^3} = 4 \cdot \frac{2y(y^2+12x^2)}{(y^2-4x^2)^3}$.

Ми отримали тотожність. Отже, функція u задовольняє заданому рівнянню.

9. Переконатися, що вираз $\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0$ є повним диференціалом функції. У цьому разі знайти функцію за її повним диференціалом.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується умова (9.21).

Тут $P(x,y) = 1-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{x^2+y^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тому заданий вираз є повним диференціалом функції. Знайдемо її. Маємо

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

З першої умови інтегруванням по x знаходимо

$$u = \int\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \varphi(y) = x - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y).$$

Продиференцюємо отриманий вираз по змінній y та задовільним умові 2:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \varphi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2};$$

звідси

$$\varphi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = 0.$$

Отже, доданки, що містять змінну x, зникли, $\varphi'(y) = 0$. Тільки похідна константи дорівнює нулю, отже

$$\varphi(y) = C.$$

Остаточно маємо

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + +C.$$

Перевірити правильність знайденого результату можна знаходженням повного диференціала отриманої функції.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, виконав необхідні умови існування екстремуму (9.24):

$$z'_x = 2e^{2x}(x + y^2 + 2y) + e^{2x} = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1),$$

$$z'_y = e^{2x}(2y + 2),$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ e^{2x}(2y + 2) = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що експонента не може дорівнювати нулю, система приймає вигляд:

$$\begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0 \\ 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. З другого рівняння отримаємо значення y і підставимо у перше рівняння системи, маємо

$$\begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0 \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 - 4 + 1 = 0 \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1. \end{cases}$$

Отже, стаціонарна точка має координати $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 2e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) + 2e^{2x} =$$
$$= 2e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 2);$$
$$z''_{xy} = e^{2x}(4y + 4);$$
$$z''_{yy} = 2e^{2x}.$$

Обчислимо їхнє значення в стаціонарній точці $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ та перевіримо виконання умов (9.25) – (9.28)

$A = 2e(1 + 2 - 4 + 2) = -2e; \quad B = e(-4 + 4) = 0; \quad C = 2e;$

$A \cdot C - B^2 = -2e \cdot 2e - 0^2 = -4e^2 < 0.$

За умовою (9.27) в точці M немає ні максимуму, ні мінімуму.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 13.3):

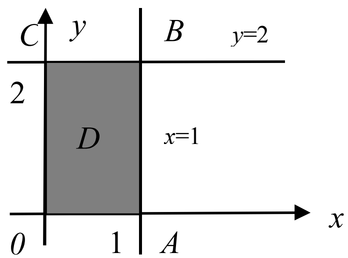

Рисунок 13.3.

Знайдемо стаціонарні точки, що належать області D. Для цього знайдемо частинні похідні першого порядку та дорівняємо їх до нуля:

$$z'_x = 2x + 2y - 4 \qquad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$$
$$z'_y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2y - 4 = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Точка $M_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ належить області D. Знайдемо тепер стаціонарні точки на лініях, що обмежують область D:

OA: $\quad y = 0\ (0 \le x \le 1) \qquad z = x^2 - 4x; \quad z'_x = 2x - 4;$
$\qquad z'_x = 0 \qquad x = 2.$

Точка з координатами $M_2(2;\ 0)$ не належить області D.

AB: $\quad x = 1\ (0 \le y \le 2) \qquad z = 1 + 2y - 4 - y = y - 3;$
$\qquad z'_y = 1 \ne 0.$

На лінії AB стаціонарних точок немає.

BC: $\quad y = 2\ (0 \le x \le 1) \qquad z = x^2 + 4x - 4x - 2 = x^2 - 2;$
$\qquad z'_x = 2x; \qquad z'_x = 0; \quad x = 0.$

Знайдена стаціонарна точка співпадає з кутовою точкою $C(0;\ 2)$.

CO: $\quad x = 0\ (0 \le y \le 2) \qquad z = -y; \qquad z'_y = -1 \ne 0.$

На лінії CO стаціонарних точок немає.

Обчислимо значення функції в знайдених стаціонарних та кутових точках області D та оберемо серед них найбільше на найменше.

$$z\Big|_{M_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4};$$

$$z\Big|_{O(0;\ 0)} = 0;$$

$$z\Big|_{A(1;\ 0)} = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3;$$

$$z\Big|_{B(1;\ 2)} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 = -1;$$

$z\Big|_{C(0;\ 2)} = -\,2.$

Отже, найбільше значення приймає функція в точці $O(0;\ 0)$, $z\Big|_{O} = 0$, а найменше – в точці $A(1;\ 0)$, $z\Big|_{A} = -\,3$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3 + 2y^2 + 3xyz - 5x + 8z = 0$ у точці $M_0(1;2;3)$.

Розв'язання. Скористаємося рівняннями (9.32), (9.33). Для цього знайдемо частинні похідні та обчислимо їхні значення у точці M_0:

$F'_x = 3x^2 + 3yz - 5;$ $\qquad F'_x\Big|_{M_0} = 3 + 18 - 5 = 16;$

$F'_y = 4y + 3xz;$ $\qquad F'_y\Big|_{M_0} = 8 + 9 = 17;$

$F'_z = 3xy + 8;$ $\qquad F'_x\Big|_{M_0} = 6 + 8 = 14.$

Отже, за формулою (9.32) знайдемо рівняння дотичної площини:

$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0;$
$16(x - 1) + 17(y - 2) + 14(z - 3) = 0;$
$16x - 16 + 17y - 34 + 14z - 42 = 0;$
$16x + 17y + 14z - 92 = 0$ - рівняння дотичної площини.

За формулою (9.33) запишемо рівняння нормалі до поверхні:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)};$$
$$\frac{x - 1}{16} = \frac{y - 2}{17} = \frac{z - 3}{14}.$$

13. Знайти похідну функції $u = x^z - 5xyz$ та обчислити її значення в точці $A(1;-3;-2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2;4;-3)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль в точці A.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = zx^{z-1} - 5yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -5xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^z \ln x - 5xy.$$

Обчислимо їх значення в точці A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = -2 - 30 = -32; \ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 10; \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \ln 1 + 15 = 15.$$

Координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (1; 7; -1)$, його модуль

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{51},$$

звідси напрямні косинуси набувають значення

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{51}}; \quad \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{51}}; \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{51}}.$$

За формулою (9.36) обчислимо похідну за напрямом вектора

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -32 \cdot \frac{1}{\sqrt{51}} + 10 \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} + 15 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{51}}\right) = \frac{23}{\sqrt{51}}.$$

Градієнт знайдемо за формулою (9.37):

$$\operatorname{grad} u = -32 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} + 15 \cdot \vec{k},$$

а його модуль дорівнює

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{(-32)^2 + 10^2 + 15^2} = \sqrt{1349}.$$

Завдання 13.1.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\arcsin(xy^3)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ в точці $M(1;-3;5)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=e^{2u-v}$, де $u=x\sin y$; $v=y\cos x$ та обчислити їхні значення в точці $A\left(0;{}^{\pi}/_{2}\right)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x\sin y+y\cos x-5z^2+3xyz=0$ та обчислити їхні значення в точці $M(\pi;0;-1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\cos\frac{x}{y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\frac{xy}{x-y}$ рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$.

9. Переконатися, що вираз $du=\frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+2xy-4x+8y$ в області D, обмеженої лініями $x=0; y=0; x=1; y=2$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $S: x^2+y^2+z^2-8xyz+14x-3y+16=0$ у точці $M(2;5;-3)$.

13. Знайти похідну функції $u=x^2y+y^2z+xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-3;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(0;5;7)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.2.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\frac{2x+5y}{x^2-y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{16}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=e^{5x^4-3y^2}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\ln\cos(x^2-y^2+6yz)$ в точці $M(0;-1;5)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=u^2+v^2-5uv$, де $u=\ln(x^2+y^2)$; $v=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(0;1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x^4+2y^3+3z^2-4xyz=5$ та обчислити їхні значення в точці $M(0,-2,5)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=e^{x^2+y^3}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\sqrt{x^2+y^2}$ рівнянню $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$.

9. Переконатися, що вираз $du=2xydx+x^2dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2y(4-x-y)$ в області D, обмеженої лініями $x=0; y=0; x+y-6=0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2y-y^2z+6x-2y+5z-13=0$ у точці $M(-1,-3,2)$.

13. Знайти похідну функції $u=\ln(xy+yz+xz)$ та обчислити її значення в точці $A(1;2;3)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(2;2;4)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.3.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\frac{5xy^3}{\sqrt{4x-y}}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{49}=-1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\cos\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$ в точці $M\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=u^2v-uv^2$, де $u=x\sin y$; $v=y\cos x$ та обчислити їхні значення в точці $A\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

6. Знайти частинні похідні функції $e^x-3y+2xz^2=16$ заданої неявно та обчислити їхні значення в точці $M(0;8-3)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\arccos(4x-5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=e^{\frac{x}{y}}\ln y$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\ln y}$.

9. Переконатися, що вираз $du=4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2$ в області D, обмеженої лініями $x=0$; $y=0$; $x+y-6=0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2-3y^3+4z^4+3xyz-21=0$ у точці $M(5;3;1)$.

13. Знайти похідну функції $u=x^z-5xyz$ та обчислити її значення в точці $A(-4;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;3;8)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.4.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(2x - 3y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{16} = 0$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{\sqrt{xy}}{x-2y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$ в точці $M\left(\frac{\pi}{2}; 2; 1\right)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \arcsin(u - v)$, де $u = 3x^2y$; $v = x + y^2$ та обчислити їхні значення в точці $A(1; 1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $z^3 - 3xyz + 2x - 5y = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-1; -1; 2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(5x^3 + 3y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = x^y$ рівнянню $\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

9. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в області D, обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y + 2 = 0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2y^2z^2 - 2(x + y + z) = 16$ у точці $M(-4; 3; -2)$.

13. Знайти похідну функції $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-2; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 1; 2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.5.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{9xy}{4-x+y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{50} = 2z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \operatorname{tg}\left(\frac{3x+y^2}{x}\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z) = x\cos y - z\sin x + 3xyz$ в точці $M(0;\pi;4)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = u^2 \ln v$, де $u = \frac{x}{y}$; $v = 3x - 2y$ та обчислити їхні значення в точці $A(3;4)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x + y + z = 6xyz$ та обчислити їх значення в точці $M(4;-6;3)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin(xy^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = e^{\frac{x}{y^2}}$ рівнянню $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 10$ в області D, обмеженої лініями $x = \pm 1; y = \pm 1$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $z = x^3 - 3y^2 + 5xz - 25$ у точці $M(4;-3;1)$.

13. Знайти похідну функції $u = e^{xz-y^2}$ та обчислити її значення в точці $A(0;1;2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-3;5;1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.6.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos(4x + 5y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x\sqrt{2x^4 - 3y^5}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + 2y^3 - 3z}\right)$ в точці $M(1; 2; -5)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \ln(e^x + e^y)$, де $u = xy^3$; $v = \sqrt{2x - y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(2; 3)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $7xy^2 - 4yz^2 + 3x^2z - 8 = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(2; 2; 5)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \mathrm{tg}(4x - 5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \sqrt{x} \sin\frac{y}{x}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}z$.

9. Переконатися, що вираз $\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx - \left(\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = xy(4 - x - y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4 - 2x^2 - y^2$ в області D, обмеженої лініями $y = 0$; $y = \sqrt{1 - x^2}$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2 - y^2 + 5xz - z^4 + 12 = 0$ у точці $M(-3; 4; -1)$.

13. Знайти похідну функції $u = xe^z - ye^x$ та обчислити її значення в точці $A(-6; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(9; 1; -3)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.7.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(16 - x^2 - y^2)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $y^2 = 16x$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \cos\left(x + \sqrt{xy}\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arccos\sqrt{xy} - 4xz^3$ в точці $M(4; 0; -3)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \operatorname{tg}(uv)$, де $u = x^y$; $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ та обчислити їхні значення в точці $A(1; 3)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x\sin y + y\sin z + z\sin x = \pi$ та обчислити їхні значення в точці $M(\pi; 0; -\pi)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos\sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

9. Переконатися, що вираз $\left[\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right]dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2} - y^2\right]dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в області D, обмеженої лініями $y = 0$; $y = x + 2$; $x = 2$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $y^2 - z^2 - 5xyz + 8x - 3y = 14$ у точці $M(4; 4; -1)$.

13. Знайти похідну функції $u = x \cdot e^{y^2 - z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(4; 1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-1; 0; 5)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.8.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=5y+\frac{4x}{12-3x+4y}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{81}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\ln\left(\sqrt{xy}+5x-3y\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\frac{\sin(x+y)}{8z^2}$ в точці $M\left(0;\frac{\pi}{2};5\right)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\arcsin\frac{u}{v}$, де $u=\sqrt{2x-y}$; $v=x^2y+3$ та обчислити їхні значення в точці $A(2;4)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $\sqrt{x^2+y^2}=7x-2yz$ та обчислити їхні значення в точці $M(-3;4;1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\arcsin(2x-y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

9. Переконатися, що вираз $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=x^2+y^2+xy-4x+5y$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$ в області D, обмеженої лініями $x=0,\ x=2,\ y=-1,\ y=2$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $8(x+y+z)-6x^3-12yz+5=0$ у точці $M(9;1;-2)$.

13. Знайти похідну функції $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ та обчислити її значення в точці $A(3;4;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(5;2;6)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.9.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{x^2+y^2-16}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{100}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=x\cos(3y^8)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\ln(x+y)-\sqrt{x^2-z^2}$ в точці $M(4;-3;0)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\operatorname{tg}(2u^2-v^2)$, де $u=\frac{x}{y}$; $v=\sqrt{x+y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(4;2)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=8$ та обчислити їхні значення в точці $M(3;2;1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\ln(7x^2+8y^3)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\ln(x^2+xy+y^2)$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

9. Переконатися, що вираз $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z=xy(1-x-y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в області D, обмеженої лініями $y=x$, $y=4$, $x=0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3+2y^2+3z^3-4xy+8z-11=0$ у точці $M(-7;1;-1)$.

13. Знайти похідну функції $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ та обчислити її значення в точці $A(4;1;1;)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(-3;5;2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.10.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{85}{32 - 2x^2 - 8y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = e^{-\frac{x}{y}}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{x} \sin \frac{y}{z}$ в точці $M(9; \pi; 6)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \ln(e^u + e^v)$, де $u = x \sin y$; $v = y \cos x$ та обчислити їхні значення в точці $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $y^2 = xz - y + 6xyz$ та обчислити їхні значення в точці $M(0; 2; -3)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 y^2 (2 - x - y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області D, обмеженої лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3 - 2x^2 y^2 - 5z^3 + 4y - 27 = 0$ у точці $M(-8; 2; -3)$.

13. Знайти похідну функції $u = x^2 y + y^2 z + xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-4; -3; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 1; 0)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.11.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{5x-y}}{x+6}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} - \frac{z^2}{18} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln\sin(x^2 z^2 - 6y)$ в точці $M(4; 0; -2)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \frac{u^2}{u+v}$, де $u = x^3 y$; $v = \sqrt{3x - y}$ та обчислити їх значення в точці $A(2; -3)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x^2 - 4yz + y^2 - 3xz = 18$ та обчислити їхні значення в точці $M(-3; 5; 0)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = xe^{x+y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в області D, обмеженої лініями $x + 2y - 4 = 0,\ x - 2y - 4 = 0, x = 0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^4 - 2y^3 - 5z^2 - 6xz - 12y + 7 = 0$ у точці $M(4; 5; -2)$.

13. Знайти похідну функції $u = (x + y)^z$ та обчислити її значення в точці $A(8; -3; 0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(7; 2; -1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.12.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(16x^2 - 25y^2)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x^y$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arcsin\left(\frac{x^2}{z} - y^3\right)$ в точці $M(1; 0; 2)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \sqrt{u + v + 9}$, де $u = \ln(xy)$; $v = \sqrt{x - 2y}$ та обчислити їхні значення в точці $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x + y + z = 2x^3y^3z^3$ та обчислити їхні значення в точці $M(-1; 1; 2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(3x - \sqrt{y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdy}{x^2+y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $6xz - 4yz + 3x^2 - 5z^4 + 12y - 18 = 0$ у точці $M(-3; 3; 5)$.

13. Знайти похідну функції $u = (x + 2y + 3z)^2$ та обчислити її значення в точці $A(-5; 3; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 5; -2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.13.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{12-3x^2+2y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=0$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\sqrt{z}x^y$ в точці $M(1;2;9)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\operatorname{arctg}(uv)$, де $u=xy^5$; $v=x+\sin y$ та обчислити їхні значення в точці $A(1;0)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $xyz=\sqrt{z^2-y}$ та обчислити їхні значення в точці $M(5;3;2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\arcsin(4x+5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ рівнянню $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

9. Переконатися, що вираз $du=e^y dx+(xe^y-2y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+xy-2$ в області D, обмеженої лініями $y=0$, $y=4x^2-4$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $z=4x^2+3y^2-8xyz-7x+13$ у точці $M(-6;-1;5)$.

13. Знайти похідну функції $u=(xy)^z$ та обчислити її значення в точці $A\left(\frac{1}{2};2;3\right)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B\left(\frac{3}{2};4;-6\right)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.14.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{5}{x^2+9y^2-36}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 4z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точці $M(4; 0; 5)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \operatorname{arcctg}(u - 3v)$, де $u = y\sin^2 x$; $v = x + y^3$ та обчислити їхні значення в точці $A(0; 1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = 15$ та обчислити їхні значення в точці $M(5; -4; 1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 \sin(x - y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = y\ln(x^2 - y^2)$ рівнянню $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

9. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - 3x - 2y$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2y - y^2z + 5yz - 3x = 28$ у точці $M(1; 3; -5)$.

13. Знайти похідну функції $u = x \cdot \ln(yz + x^2)$ та обчислити її значення в точці $A(4; -2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 1; -3)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.15.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{18} = 2z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = 5^{\frac{y}{x}}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{x}\ln\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$ в точці $M(1; 16; 9)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \frac{u}{v} - \frac{v}{u}$, де $u = x\sqrt{y}$; $v = \cos(xy)$ та обчислити їхні значення в точці $A(1; 4)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $y\cos x - x\cos z = 6x - 15$ та обчислити їхні значення в точці $M(0; 4; \pi)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{\sqrt{x+y}}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \ln(e^x + e^y)$ рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

9. Переконатися, що вираз $du = \left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)y dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy + 2{,}5y^2 - 2x$ в області D, обмеженої лініями $x = 0,\ y = x,\ y = 4$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $z^4 - x^3 - y^2 + 9x - 3yz = 25$ у точці $M(-4; -2; 1)$.

13. Знайти похідну функції $u = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-6; 8; 0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-5; 7; 1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.16.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\frac{6xy}{5x^2-15y}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $y^2=4x$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=(1+xy)^y$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ в точці $M(-1;3;5)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\arccos\frac{2u}{v}$, де $u=x^3-4\sqrt[3]{y}$; $v=x(y-5)$ та обчислити їхні значення в точці $A(2;8)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $xy^2+yz^2+zx^2-18=0$ та обчислити їхні значення в точці $M(4;2;-2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=(x-y)\cos x$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=e^x\cos y$ рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Переконатися, що вираз $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-\ln(x+y)$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=2x^2+2xy-0{,}5y^2-4x$ в області D, обмеженої лініями $y=2x,\ y=2,\ x=0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $8x^2z-3z^2y-4xyz+22z=17$ у точці $M(-1;3;-2)$.

13. Знайти похідну функції $u=x^2-2yx^3-3y^2z$ та обчислити її значення в точці $A(8;5;-3)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(7;4;2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.17.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{25}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=8\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$ в точці $M(3;4;2)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\ln(2u-v)$, де $u=\frac{1}{6}x^3y^2$; $v=\sqrt{x+3y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(3;2)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $xe^y-7yz+15x-23=0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-2;0;4)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=y^2\ln(4x+7)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=e^{xy}$ рівнянню $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Переконатися, що вираз $du=\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=3x^2+3y^2-x-y+1$ в області D, обмеженої лініями $x=5, y=0, y=x-1$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2y^2z^2-6(x+y+z)-2z+15$ у точці $M(-3;1;-2)$.

13. Знайти похідну функції $u=\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ та обчислити її значення в точці $A(0;3;-5)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(1;-4;1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.18.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(4x - 9y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x + z - 2xy)$ в точці $M(5; 0; -4)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = u^{3v}$, де $u = \ln(x - 2y - 5)$; $v = 4\sqrt{xy}$ та обчислити їхні значення в точці $A(12; 3)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $5x - 3y^4 + 12z^2 - 4z + 13 = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-7; 3; 1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(4y^3 - 3x^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = x \ln \frac{y}{x}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Переконатися, що вираз $du = (y - \sin x)dx + (x - 2y\cos y^2)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 5$ в області D, обмеженої лініями $x = -3$, $x + y + 1 = 0$, $y = 0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $z = x^4 - 5y^2 + 8xyz - 7y$ у точці $M(3; 5; -2)$.

13. Знайти похідну функції $u = x^3y + y^3z - 3xyz$ та обчислити її значення в точці $A(-1; -2; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(0; 3; 2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.19.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(9x^2 - y^2)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = (x + 3y)^{2z}$ в точці $M(4; -1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \arccos\frac{u}{v}$, де $u = e^{xy}$; $v = x + 4y$ та обчислити їхні значення в точці $A(0; 1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $2x \ln y - 5z^3 - 8x^2y^2 - 6 = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(4; 1; 2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos\sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

9. Переконатися, що вираз $du = (y^2e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум $z = x^3 + 8y^3 - 6xy$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в області D, обмеженої $y = \sqrt{9 - 2{,}5x^2}, y = 0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz + 15z = 9$ у точці $M(4; 5; -1)$.

13. Знайти похідну функції $u = ln(xyz + x^3)$ та обчислити її значення в точці $A(1; 3; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 3; 5)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.20.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = (4x^3y^2 - x^5)^3$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z) = \ln(xy^2 - yz^2)$ в точці $M(4;-2;1)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = u\sin(u+v)$, де $u = \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$; $v = 2x^2 - 3y - 3$ та обчислити їхні значення в точці $A(2;2)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $8xyz - 4x^2 - 3y^3 + 5z^4 = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(2;-1;4)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4e^{2x-3y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = x^y$ рівнянню $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

9. Переконатися, що вираз $du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (5 - 6xy)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $8xyz - 3x^2 + 5z^3 - 16y - 22 = 0$ у точці $M(-3;2;4)$.

13. Знайти похідну функції $u = z \cdot e^{xy-2z}$ та обчислити її значення в точці $A(6;-1;2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;3;2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.21.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(6x - 2y + 12)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{16} = -1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin\sqrt{x^2 - y^2}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + z^4}}$ в точці $M(0; 4; -1)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = u^2 + v^2 - 3uv$, де $u = x^y$; $v = x \sin y$ та обчислити їхні значення в точці $A(1; 0)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $xe^y + ze^x - 15(x + z) = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-1; 0; 3)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{5x^2 + 3xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = x^y \cdot y^x$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z) \cdot z$.

9. Переконатися, що вираз $du = (e^{xy} + xye^{xy} - 7)dx + (x^2 e^{xy} + 5)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, y = x, y = 4$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 7y + 8z - 13 = 0$ у точці $M(7; -2; -3)$.

13. Знайти похідну функції $u = 7xy^2z^3$ та обчислити її значення в точці $A(-4; 1; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2; -1; 2)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.22.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\frac{6}{4x^2-3y^2-12}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\frac{9z}{(x^2+y^2+z^2)^3}$ в точці $M(-1;2;3)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\arcsin\frac{u}{v}$, де $u=\sqrt{x+y}$; $v=x^2+y^2$ та обчислити їхні значення в точці $A(1;-1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x^2y^2z^2-2x-3y+5z=0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-4;2;1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\sin\frac{x}{y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\frac{xy}{x+y}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}=2z$.

9. Переконатися, що вираз $du=(3x^2-2xy+y^2dx)+(2xy-x^2-3y^2)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=xy-2x-y$ в області D, обмеженої лініями $x=0,\ \ y=x, y=8$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2-z^4+6xz+2yz-3x=12$ у точці $M(-4;-3;1)$.

13. Знайти похідну функції $u=2x^2y^3-4xyz+3z$ та обчислити її значення в точці $A(-1;0;5)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(2;2;7)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.23.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{x}}{5x-3y}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{12} = 3z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+2y)}{z}$ в точці $M\left(0; \frac{\pi}{4}; 8\right)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \ln(x + 4y)$, де $u = x^2 - y^2$; $v = e^{xy}$ та обчислити їхні значення в точці $A(5; 3)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $\sqrt{x^2 + y^2} - 13z^5 + 8xy = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(-3; 4; -1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos(4x^3 - 8y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = e^{xy}$ рівнянню $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

9. Переконатися, що вираз $y(e^{xy} + 5)dx + x(e^{xy} + 5)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 7$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 10$ в області D, обмеженої лініями $y = 0, y = x^2 - 4$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2 + y^2 - z^2 - 6xz + 13y = 0$ у точці $M(3; 2; -1)$.

13. Знайти похідну функції $u = e^{xz-y^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-2; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 3; 6)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.24.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(4x + 5y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 4z$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arccos\sqrt{x^2 + 5y^2}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = ze^{-\frac{x}{y}}$ в точці $M(4; -1; 0)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \ln\left(u^3 - \sqrt[3]{v}\right)$, де $u = x^2y$; $v = y^3 - x$ та обчислити їхні значення в точці $A(7; -1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $13x + 5y^2 - 6z^3 + 2xy - 9yz = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(7; 3; -2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x\,\mathrm{tg}(x + 2y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \frac{y}{x}$ рівнянню $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = (3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 10$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $z = y^2 - 4z^3 - 2xy + 5x - 13$ у точці $M(-8; 1; 3)$.

13. Знайти похідну функції $u = \ln(xy + yz + 3)$ та обчислити її значення в точці $A(0; 1; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-2; 4; 5)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.25.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\frac{9y}{3x^2-y}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $y^2=10x$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\sqrt{xy}\ln x$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=x^2+y^2-4xy\cos z$ в точці $M\left(0;6;\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=u^2\cdot e^{-v}$, де $u=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$; $v=\ln(2x-y)$ та обчислити їхні значення в точці $A(1;1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $yz-x^y+25=0$ та обчислити їх значення в точці $M(4;1;-2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\sqrt{y}\sin 2x$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\frac{x^2+y^2}{x-y}$ рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{x+y}{x-y}$.

9. Переконатися, що вираз $du=(e^{x+y}-\cos x)dx+(e^{x+y}+\sin y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=x^2+xy+y^2+x-y+8$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$ в області D, обмеженої лініями $x=0, x=1, y=0, y=1$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $2xz+5xy-z^4+2x-3y-17=0$ у точці $M(4;2;8)$.

13. Знайти похідну функції $u=x^2y-z^3+2xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-4;1;2)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;0;5)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.26.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos(x + 6y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln\left(\sqrt{x^2 - y^2} + x\right)$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y^2} - z\right)$ в точці $M(4; 2; 1)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = \frac{u^2}{2u - 3v}$, де $u = x + \sqrt{y}$; $v = y \cos x$ та обчислити їх значення в точці $A(0; 4)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $6xyz - 2(x^3 + y^3 + z^3) = 11$ та обчислити їхні значення в точці $M(2; 7; -5)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos\sqrt{x + y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \arcsin\frac{x}{x + y}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = \left(y^2 e^{xy^2} - 1\right)dx + \left(2xye^{xy^2} + 5\right)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 4(x - y) - x^2 - 2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3 - 2y^2 + 5xz - 14x + 2z - 11 = 0$ у точці $M(6; 3; -2)$.

13. Знайти похідну функції $u = xe^{y^2 - z^3}$ та обчислити її значення в точці $A(8; 1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(7; -3; 1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.27.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{15-3x^2-5y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\frac{x+2y+3z}{\sqrt[3]{x+z}}$ в точці $M(9;0;-8)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=\ln(e^{2u}+e^{-v})$, де $u=x\cos y$; $v=y\sin x$ та обчислити їхні значення в точці $A(\pi;0)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x\sin z-y\sin x=5(x+z)$ та обчислити їхні значення в точці $M(\pi;8;0)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\sin(xy^3)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

9. Переконатися, що вираз $du=(y\cos xy+2x-3y)dx+(x\cos xy-3x+4y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z=x^2+xy+y^2-6x+9y$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+y^2-2x-2y-16$ в області D, обмеженої лініями $x=0, y=0, x+y=1$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2-4yz+z^2-5xz+13x-20=0$ у точці $M(-4;1;9)$.

13. Знайти похідну функції $u=\frac{xy}{\sqrt{y^2+z^2}}$ та обчислити її значення в точці $A(-4;-3;2)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(1;-3;5)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.28.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = 3y - \frac{x}{x-4y^2+2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = xye^{4x-9y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{x^2} - 2y\right)$ в точці $M(2; 1; 8)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = v^2 \ln u$, де $u = 3x - 4y$; $v = \frac{x}{y}$ та обчислити їх значення в точці $A(2; 1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $6x - z^3 + 4yz^2 - 5x^2z = 0$ та обчислити їхні значення в точці $M(4; 4; -2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \sqrt{2xy + y^2}$ рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z}$.

9. Переконатися, що вираз $du = (5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 18$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 7$ в області D, обмеженої лініями $x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^3 + y^3 + z^3 - 2xy + 7yz - 12 = 0$ у точці $M(-1; -1; 3)$.

13. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 - 7xyz$ та обчислити її значення в точці $A(2; 1; -5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 0; -3)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.29.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(x + y)$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{49} = 1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin\frac{xy}{2x-y}$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z) = \frac{7}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$ в точці $M(1;3;3)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z = uv\sin\frac{u}{v}$, де $u = x^3 + y^2$; $v = \sqrt{x - 3y}$ та обчислити їхні значення в точці $A(4;1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $4(xy + yz + xz) = y^2 - z^5$ та обчислити їхні значення в точці $M(4;-3;2)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \mathrm{ctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$ рівнянню $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

9. Переконатися, що вираз $du = (e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin x)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в області D, обмеженої лініями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $4x^2y^2z^2 - 6xy + 5yz - 4x + 2 = 0$ у точці $M(6;1;-1)$.

13. Знайти похідну функції $u = x^{yz}$ та обчислити її значення в точці $A(5;1;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;2;8)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Завдання 13.30.

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

2. За допомогою методу перерізів побудувати поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}-\frac{z^2}{64}=-1$.

3. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)^2$. Записати повний диференціал функції.

4. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x,y,z)=\ln\left(x^3-y+\sqrt[3]{z}\right)$ в точці $M(2;8;1)$.

5. Знайти частинні похідні складної функції $z=(u^2+v^2)e^{-v}$, де $u=\frac{x+1}{y}$; $v=\sqrt{xy^3}$ та обчислити їхні значення в точці $A(3;1)$.

6. Знайти частинні похідні неявно заданої функції $x\ln z+ye^x-6xyz=0$ та обчислити їхні значення в точці $M(0;2;1)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\sqrt{x}\ln(x+y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\sin^2(x-3y)$ рівнянню $9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. Переконатися, що вираз $du=(10x^2-21x^2y+2y)dx+(5+2x-7x^3)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

10. Дослідити на екстремум функцію $z=2xy-2x^2-4y^2$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+2xy-4x+8y$ в області D, обмеженої лініями $x=0, x=1, y=0, y=2$.

12. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні S: $x^2+y^2-3z^3+6xyz-12=0$ у точці $M(5;1;3)$.

13. Знайти похідну функції $u=(x+z)^{2y}$ та обчислити її значення в точці $A(4;-3;2)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(5;4;1)$. Знайти градієнт функції u, обчислити значення градієнта та його модуль у точці A.

Тема 14 «Диференціальні рівняння»

У цьому розділі ми ознайомимося зі звичайними диференціальними рівняннями. Ми навчимося знаходити загальні та частинні розв'язки диференціальних рівнянь першого та другого порядів, розв'язувати системи диференціальних рівнянь. Перед розв'язанням завдання пропонуємо повторити теоретичний матеріал, який міститься у розділі 10 Посібника «Вища математика. Модуль 2».

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\sqrt{1-x^2}dy - 3ydx = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розділимо їх так:

$$\sqrt{1-x^2}dy = 3ydx \left| \begin{matrix} :\sqrt{1-x^2} \\ :y \end{matrix} \right.; \qquad \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Проінтегруємо ліву та праву частину отриманої рівності й отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \ln y = 3\arcsin x + \ln C; \qquad y = Ce^{3\arcsin x}.$$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\cos^2 x \cdot y' - \left(9+\sqrt{2}\cos^3 x\right) = 0$, яке задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розділимо їх так:

$\cos^2 x \cdot y' = \left(9+\sqrt{2}\cos^3 x\right)$;

$\cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} = \left(9+\sqrt{2}\cos^3 x\right) \quad |\cdot dx$;

$\cos^2 x \cdot dy = \left(9+\sqrt{2}\cos^3 x\right)\cdot dx \quad |:\cos^2 x$;

$dy = \frac{\left(9+\sqrt{2}\cos^3 x\right)}{\cos^2 x}dx.$

Проінтегруємо ліву та праву частину отриманої рівності й отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\int dy = 9\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \sqrt{2}\int \cos x\, dx$;
$y = 9\mathrm{tg}x + \sqrt{2}\sin x + C$.

Знайдемо частинний розв'язок за початковими умовами:
$1 = 9\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + C; \quad 1 = 9 + 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = -9.$
Остаточно маємо частинний розв'язок: $y = 9\mathrm{tg}x + \sqrt{2}\sin x - 9$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xdy - \left(y - x\mathrm{tg}\frac{y}{x}\right)dx = 0$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку. Для цього замінимо
$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy$
$kx \cdot kdy - \left(ky - kx\mathrm{tg}\frac{ky}{kx}\right)kdx = 0.$

Скоротивши ліву та праву частину рівняння на k^2, отримаємо початкове рівняння. Отже це диференціальне рівняння – однорідне. Для розв'язання потрібно використати підстановку

$$y = ux; \quad y' = u'x + u,$$

але перед цим розділити ліву й праву частини на dx і замінити $\frac{dy}{dx} = y'$:
$x \cdot y' - y + x\mathrm{tg}\frac{y}{x} = 0;$
$x(u'x + u) - ux + x\mathrm{tg}\frac{ux}{x} = 0 \quad |: x;$
$u' + u - u + \mathrm{tg}u = 0; \qquad u' = -\mathrm{tg}u.$
Ми отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'яжемо його:
$\frac{du}{dx} = -\mathrm{tg}u; \qquad du = -\mathrm{tg}u \cdot dx \ |:\mathrm{tg}u; \qquad \frac{du}{\mathrm{tg}u} = -dx.$
$\int \mathrm{ctg}u\, du = -\int dx; \qquad \ln|\sin u| = -x + \ln C$
або $\qquad \sin u = e^{-x+\ln C}; \quad \sin u = Ce^{-x}.$
Повернемося до попередніх змінних та отримаємо шуканий розв'язок:

$$\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x}.$$

4. Проінтегрувати диференціальне рівняння
$xy' - 2y = x^3 - x.$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним, оскільки шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння в зручному вигляді, поділивши його на x:

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^2 - 1.$$

Визначимо розв'язок у такому вигляді

$$y = u \cdot v; \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставимо у рівняння та згрупуємо другий та третій доданки, вираз у дужках дорівняємо до нуля:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2\frac{u \cdot v}{x} = x^2 - 1;$$

$$u' \cdot v + u\left(v' - 2\frac{v}{x}\right) = x^2 - 1;$$

$$v' - 2\frac{v}{x} = 0; \qquad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln v = 2\ln x; \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v = x^2}.$$

Повернемося до рівняння. Беручи до уваги, що вираз у дужках дорівнює нулю, отримаємо:

$$u'v = x^2 - 1.$$

Підставимо отриману функцію v, розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u'x^2 = x^2 - 1; \qquad u' = 1 - \frac{1}{x^2}; \qquad \int du = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

$$u = x + \frac{1}{x} + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v:

$$y = uv = \left(x + \frac{1}{x} + C\right) \cdot x^2; \quad \text{або}$$

$$y = x^3 + x + Cx^2.$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$y' - xy = x^3y^3.$

Розв'язання. Задане рівняння – це рівняння Бернуллі (10.7) із $n = 3$. Поділимо рівняння на y^3 і введемо нову змінну $z = y^{1-n} = y^{-2}$:

$$\frac{y'}{y^3}-\frac{xy}{y^3}=x^3 \qquad \text{або} \qquad y'\cdot y^{-3}-xy^{-2}=x^3;$$

$$z=y^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad z'=-2y^{-3}\cdot y' \qquad \text{або} \qquad -\frac{z'}{2}=y'\cdot y^{-3}.$$

Отримаємо лінійне рівняння (10.6):

$$-\frac{z'}{2}-xz=x^3 \qquad \text{або} \qquad z'+2xz=-2x^3.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки (10.7):

$$z=uv; \quad z'=u'v+uv';$$

$$u'v+uv'+2xuv=-2x^3;$$

$$u'v+u(v'+2xv)=-2x^3.$$

Рівняння розділяється на два рівняння з відокремленими змінними. Знайдемо функцію v:

$$v'+2xv=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=-2xv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-2xdx;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int xdx \quad \Rightarrow \quad \ln v=-x^2 \quad \Rightarrow \quad v=e^{-x^2}.$$

Повернемося до рівняння та знайдемо функцію u:

$$u'v=-2x^3\,; \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{2x^3}{v}=-\frac{2x^3}{e^{-x^2}}=-2x^3e^{x^2}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз. Зауважимо, що під час інтегрування необхідно ввести нову змінну та використати метод інтегрування частинами:

$$u=-2\int x^3e^{x^2}dx=-\int x^2\cdot 2xe^{x^2}dx=\begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx\end{bmatrix}=$$

$$=-\int te^tdt=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^tdt & v=e^t\end{bmatrix}=-te^t+\int e^tdt=$$

$$=-te^t+e^t+C=e^t(1-t)+C=e^{x^2}(1-x^2)+C.$$

Отже, проміжна функція z має такий вигляд:

$$z=\left(e^{x^2}(1-x^2)+C\right)\cdot e^{-x^2}=(1-x^2)+C\cdot e^{-x^2}.$$

Повернемося до шуканої функції, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{y^2}=(1-x^2)+C\cdot e^{-x^2}.$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2-ay)dx+(y^2-ax)dy=0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Для цього випишемо функції P і Q та продиференціюємо їх:

$$P(x,y)=x^2-ay; \qquad Q(x,y)=y^2-ax;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -a; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Перевірка показала, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Проінтегруємо його. Довільною точкою (x_0, y_0) оберемо точку $(0{,}0)$ (область визначення функції це дозволяє). Використаємо формулу (10.16):

$\int_0^x x^2 dx + \int_0^y (y^2 - ax)dy = C;$

$\frac{x^3}{3}\Big|_0^x + \left(\frac{y^3}{3} - axy\right)\Big|_0^x = C.$

Отримаємо

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - axy = C.$$

7. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x; \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Розв’язання. Щоб розв’язати рівняння такого типу, його необхідно двічі проінтегрувати:

$$y' = \int (2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x)dx = \int (2\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2 \end{bmatrix} = -\int (2u^2 - 1 + u^2)\, du =$$

$$= -\int (3u^2 - 1)\, du = -u^3 + u + C_1 = -\cos^3 x + \cos x + C_1.$$

Знайдемо коефіцієнт C_1 за умовою $y'(0) = 1$:

$$1 = -\cos^3 0 + \cos 0 + C_1; \quad 1 = -1 + 1 + C_1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

$$y = \int (-\cos^3 x + \cos x + 1)dx = -\int (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) +$$

$$+ \int \cos x\, dx + \int dx = -\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + \sin x + x + C_2 =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + x + C_2.$$

Знайдемо коефіцієнт C_2 за умовою $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{\sin^3 0}{3} + 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

Остаточно маємо $y = \frac{\sin^3 x}{3} + x + 1.$

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' - y' = 0.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції, тобто y. Для розв'язання використаємо підстановку (10.21, а):

$$y' = z, \quad y'' = z';$$

$$xz' - z = 0.$$

Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$x\frac{dz}{dx} = z; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln z = \ln x + \ln C_1; \quad \text{або} \quad \ln z = \ln(C_1 x),$$

звідси

$$z = C_1 x.$$

Пригадаємо, що $y' = z$, проінтегруємо останній вираз, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння відносно шуканої функції y:

$$y = C_1\int x dx = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2.$$

9. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y^3 y'' = -1,$$

що задовольняє умовам $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної (10.22). Для пониження порядку скористаємося підстановкою (10.23):

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Рівняння матиме такий вигляд:

$$y^3 p\frac{dp}{dy} = -1.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$pdp = -\frac{dy}{y^3}; \qquad \int pdp = -\int\frac{dy}{y^3};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \quad \text{або} \quad p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1.$$

Звідси

$$p = \sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}.$$

Знайдемо константу C_1: $\quad 0 = \sqrt{1 + C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1.$

Повернемося до шуканої функції:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}; \qquad \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx.$$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx, \qquad -\sqrt{1 - y^2} = x - C_2.$$

Знайдемо константу C_1: $\quad -\sqrt{1 - 1^2} = 1 - C_2; \quad C_2 = 1.$

Остаточно маємо частинний розв'язок диференціального рівняння

$$\sqrt{1 - y^2} = -(x - 1)$$

або виконавши елементарні перетворення отримаємо

$$1 - y^2 = (x - 1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{2x - x^2}.$$

10. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:
   а) $y'' - 7y' + 12y = 0$;
   б) $y'' + 16y' + 64y = 0$;
   в) $y'' + 25y = 0$.

   Розв'язання.

а) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$
$$k^2 - 7k + 12 = 0,$$

його корені $k_1 = 3$; $k_2 = 4$. За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x};$$

б) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$
$$k^2 + 16k + 64 = 0,$$

його корені $k_1 = k_2 = -8$. За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-8x};$$

в) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y'' \to k^2;$$
$$k^2 + 25 = 0, \quad \Rightarrow \quad k^2 = -25; \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 5i$$

його корені $k_1 = k_2 = -8$. За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

11. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:
 а) $y'' - 8y' + 12y = 4\cos 2x$;
 б) $y'' + 3y' = 2x^3 - 1$;
 в) $y'' - 6y' + 13y = 9e^{3x}$.

Розв'язання.

а) відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у такому вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' - 8y' + 12y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 8k + 12 = 0,$$

де $k_1 = 2;\ k_2 = 6$ - корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння виглядає так

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_{\text{н}} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_{\text{н}}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\,;\; y_{\text{н}}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$\Rightarrow \quad -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+12(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\cos 2x;$$
$$8A\cos 2x + 8B\sin 2x + 16A\sin 2x - 16B\cos 2x = 4\cos 2x.$$

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & 8A - 16B = 4 \\ \sin 2x & 8B + 16A = 0 \end{array}.$$

Розв'яжемо отриману систему, скоротивши перше рівняння на 4, а друге – на 8:

$$\begin{cases} 2A - 4B = 1 \\ 2A + B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A - 4\cdot(-2A) = 1 \\ B = -2A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}1 \\ B = -0{,}2. \end{cases}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = 0{,}1\cos 2x - 0{,}2\sin 2x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{6x} + 0{,}1\cos 2x - 0{,}2\sin 2x.$$

б) відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' + 3y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 + 3k = 0,$$

де $k_1 = 0$; $k_2 = -3$ - корені характеристичного рівняння.

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 + C_2e^{-3x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв’язку, звернувши увагу на той факт, що один із коренів характеристичного рівняння співпадає з коренем правої частини:

$$y_{\text{н}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_{\text{н}}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D;\ y_{\text{н}}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C;$$

$$\Rightarrow$$

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + 3(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) = 2x^3 - 1.$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 12A = 2 \\ x^2 & 12A + 9B = 0 \\ x^1 & 6B + 6C = 0 \\ x^0 & 2C + 3D = -1 \end{array}.$$

Розв’яжемо отриману систему послідовно виключаючи невідомі, починаючи з першого рівняння:

$$A = \frac{1}{6};$$

$$12 \cdot \frac{1}{6} + 9B = 0; \quad 9B = -2 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{2}{9};$$

$$6 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) + 6C = 0; \quad 6C = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{9};$$

$$2 \cdot \frac{2}{9} + 3D = -1; \quad 3D = -\frac{13}{9} \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{13}{27}.$$

Отримаємо частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x.$$

Отже, загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x;$$

в) відповідно до теореми про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у такому вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 6k + 13 = 0,$$

де $k_{1,2} = 3 \pm 2i$ - корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння такий:

$$y_о = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку, звернувши увагу на той факт, що один із коренів характеристичного рівняння співпадає з коренем правої частини:

$$y_н = Ae^{3x}.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_н{}' = 3Ae^{3x};\ y_н{}'' = 9Ae^{3x};$$

$$\Rightarrow \quad 9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 13 \cdot Ae^{3x} = 9e^{3x};$$

$$4Ae^{3x} = 3e^{3x}$$

З останнього рівняння знайдемо невідомий коефіцієнт:

$$A = \frac{3}{4};$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_н = \frac{3}{4}e^{3x}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{3}{4}e^{3x}.$$

12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$, яке задовольняє початковим умовам $y(0) = 1;\ y'(0) = 0$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{о} + y_{н}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 2k + 5 = 0,$$

де $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ - корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{о} = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Звертаємо увагу на те, що корені характеристичного рівняння не дорівнюють кореням правої частини:

$$y_{н} = (Ax + B)e^x.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$y_{н}' = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + Ax + B)e^x;$

$y_{н}'' = Ae^x + (A + Ax + B)e^x = (2A + Ax + B)e^x;$

$(2A + Ax + B)e^x - 2(A + Ax + B)e^x + 5(Ax + B)e^x = xe^{2x};$

$(4Ax + 4B)e^{2x} = xe^{2x}$ або $4Ax + 4B = x$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 4A = 1 \\ x^0 & 4B = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{н} = \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, треба задовольнити початковим умовам, для цього знайдемо похідну:

$$y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) +$$
$$+\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x};$$

$$\begin{array}{l|l} y(0) = 1 & C_1 = 1 \\ y'(0) = 0 & C_1 + 2C_2 + \frac{1}{4} = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{5}{8}. \end{array}$$

Отже, частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має такий вигляд:

$$y = e^x\left(\cos 2x - \frac{5}{8}\sin 2x\right) + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;
б) за допомогою характеристичного рівняння.

Розв’язання.

а) Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = 3x' - y' \ .$$

Підставимо в отримане рівняння y' з другого рівняння

$$x'' = 3x' - 5x + y.$$

Виразимо взяте з першого рівняння $y = -x' + 3x$ і підставимо в останнє:

$$x'' = 3x' - 5x - x' + 3x;$$
$$x'' - 2x' + 2x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Запишемо характеристичне рівняння, йому відповідне:

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{1,2} = 1 \pm i.$$

За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв’язок для шуканої функції x:

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t).$$

Знайдемо функцію y. Для цього продиференціюємо x:

$$x' = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^t(-C_1\sin t + C_2\cos t) =$$
$$= e^t(C_1\cos t + C_2\sin t - C_1\sin t + C_2\cos t);$$
$$y = -x' + 3x = -e^t(C_1\cos t + C_2\sin t - C_1\sin t + C_2\cos t) +$$
$$+3e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) =$$
$$= e^t(2C_1\cos t + 2C_2\sin t + C_1\sin t - C_2\cos t)$$

$$y = e^t\big((2C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + 2C_2)\sin t\big).$$

Отримаємо загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t);$$
$$y = e^t\big((2C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + 2C_2)\sin t\big).$$

б) Характеристичне рівняння системи має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 3-k & -1 \\ 5 & -1-k \end{vmatrix} = (3-k)(-1-k) - 5(-1) = k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Звідси $k_{1,2} = 1 \pm i$.

Перший розв’язок системи

$$x = e^t\cos t; \quad \Rightarrow$$
$$y = 3x - x' = 3e^t\cos t - e^t\cos t + e^t\sin t = e^t(2\cos t + \sin t);$$

другий розв’язок системи

$$x = e^t\sin t; \quad \Rightarrow$$
$$y = 3x - x' = 3e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t = e^t(2\sin t - \cos t).$$

Отже, загальний розв’язок системи виглядає так:

$$x = C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t);$$
$$y = C_1e^t(2\cos t + \sin t) + C_2e^t(2\sin t - \cos t) =$$
$$= e^t\big((2C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + 2C_2)\sin t\big).$$

Завдання 14.1

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $ye^{2x}dx + (1 + e^{2x})dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(x - 2)dy - (y + 3)dx;\ y(3) = -1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$
4. $xy' - 4y = 2x^2 - 3x.$
5. $xy' + \frac{y}{x} = -xy^2.$
6. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2xy^2\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 2x^2y\right)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = x^2 - \cos x;\ y(\pi) = 0;\ y'(\pi) = -2.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0.$
9. $yy'' - y^2y' - (y')^2 = 0.$
10. а) $y'' - 4y' + 3y = 0;$
    б) $y'' + 16y' + 64y = 0;$
    в) $y'' + 2y' + 2y = 0.$
11. а) $y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3x - 5;$
    б) $y'' - 6y' + 8y = 14e^{2x};$
    в) $y'' - 7y' + 6y = \sin x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.2

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $xyy' = 1 - x^2$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $y'\sqrt{1+x^2} - x = 0;\ y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.
4. $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$.
5. $xy' - y = y^3$.
6. $(3x^2 - 2y^2 + 8xy)dx + (4x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $x^4y''' = 1\ y(1) = \frac{2}{3}\ ;\ y'(1) = \frac{1}{6};\ \ y''(1) = \frac{4}{3}$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $(1+x)y'' + y' = 0$.
9. $yy'' = 1 + (y')^2$.
10. а) $y'' - 4y' = 0$;
    б) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
    в) $y'' - 4y' + 5y = 0$.
11. а) $y'' - 2y' = 8x^3 - 10$;
    б) $y'' - 4y' + 3y = 20\cos 2x + 27\sin 2x$;
    в) $y'' - 5y' + 4y = 8e^{3x}$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x;\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 1$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.3

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $xy' + y = y^2$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $5^{x^2+y}dy + xdx = 0$; $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = -\frac{x+y}{x}$.
4. $y' = y\text{tg}x + \cos x$.
5. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.
6. $(4x^3 + 15x^2y + 8xy^2)dx + (5x^3 + 8x^2y - 4y^3)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = x - 1$ $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 2$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
9. $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$.
10. а) $y'' - 16y = 0$;
    б) $4y'' + 4y' + y = 0$;
    в) $y'' - 6y' + 13y = 0$.
11. а) $y'' + 3y' = 9x^2 + 3x + 5$;
    б) $y'' - 6y' + 5y = 27e^{2x}$;
    в) $y'' + 3y' + 2y = 26\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 8\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + y = 4\sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.4

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $e^{x+y}dx + ydy = 0.$

Розв’язати задачу Коші:

2. $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0; y(1) = 1.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $xy' = y\ln\frac{x}{y}.$
4. $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}.$
5. $xy' + y = y^2\ln x.$
6. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)ydy = 0.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x \; y(0) = -\frac{1}{8}\;;\; y'(0) = \frac{1}{8};\; y''(0) = \frac{1}{2}.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $xy'' + y' = 0.$
9. $yy'' - (y')^2 = 0.$
10. а) $y'' - y' - 2y = 0;$
    б) $y'' + 9y = 0;$
    в) $y'' + 26y' + 169y = 0.$
11. а) $y'' + 2y' + 2y = 6x^2 + 14x + 6;$
    б) $y'' + 5y' + 4y = \sin 2x;$
    в) $2y''+5y' = 4e^x.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; y(0) = \frac{4}{3}\;;\; y'(0) = \frac{1}{27}.$
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.5

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $3x^2ydx + 2\sqrt{4-x^3}dy = 0$.

Розв’язати задачу Коші:

2. $x^2(2yy' - 1) = 1;\ y(1) = 0$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.
4. $y' - 4\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$.
5. $xy' - y = y^3$.
6. $\left(y + \frac{1}{1+x^2}\right)dx + \left(x - \frac{1}{1+y^2}\right)dy = 0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x,\ y(0) = -\frac{5}{9};\ y'(0) = -\frac{2}{3}$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $y'' = -\frac{x}{y'}$.
9. $yy'' - y'(1+y') = 0$.
10. а) $y'' - 2y' - 48y = 0$;
    б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
    в) $y'' + 25y = 0$.
11. а) $y'' - y = 3x^2 - 7x + 9$;
    б) $y'' - 2y' + y = 10e^x$;
    в) $y'' - y' - 2y = 22\cos 5x - 32\sin 5x$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 4y' = (x-2)e^{4x};\ y(0) = 2;\ y'(0) = -1$.
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - 5y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.6

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(y+1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $(y+2)dx + xdy = 0; y(1) = 2$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = \frac{xy+y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.
4. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.
5. $4y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$.
6. $(x+y-2)dx + (x-y+4)dx = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = x\sin x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y'' - 2\mathrm{ctg}x \cdot y' = \sin^3 x$.
9. $y'' + \frac{1}{1-y}(y')^2 = 0$.
10. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$;
    б) $y'' - 4y = 0$;
    в) $y'' - 6y' + 13y = 0$.
11. а) $y'' + y' - 2y = 8x^2 - 4x$;
    б) $y'' + 2y' = 9e^{-2x}$;
    в) $y'' + 4y = 8\sin 2x$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $2y'' + y' - y = 2e^x; y(0) = 1 ;\ y'(0) = 0$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.7

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $\cos(x-2y)y' + \cos(x+2y)y' = \sec x$.

Розв’язати задачу Коші:

2. $xydx + (x+1)dy = 0$; $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.
4. $xy' - 2y = 2x^4$.
5. $y' - y + y^2\cos x = 0$.
6. $\frac{(y+1)dx-(x-1)dy}{(y+1)^2} = 0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = x - \ln x\ y(1) = -\frac{5}{12}$; $y'(1) = \frac{3}{2}$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $4y' + (y')^2 = 4xy''$.
9. $yy'' = (y')^1$.
10. а) $y''+9y' + 20y = 0$;
    б) $y'' - 8y' + 16y = 0$;
    в) $y'' + 9y = 0$.
11. а) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$;
    б) $y'' + 2y' + y = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1$;
    в) $y'' + 5y' + 6y = -50\sin 4x$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5x}$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -5{,}5$.
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.8

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $xdx - \sqrt{1-x^2}dy = 0.$

Розв’язати задачу Коші:

2. $ydx + \mathrm{ctg}xdx = 0;\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $xy' = y + 2x - 2\sqrt{xy - y^2}.$
4. $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}.$
5. $y' - y\mathrm{tg}x + y^2\cos x = 0.$
6. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ydx-xdy}{x^2}.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = x + \sin x,\ y(0) = -2;\ y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$
9. $(y'')^2 = y'.$
10. а) $y'' - 10y' = 0;$
    б) $y''+4y' + 3y = 0;$
    в) $y'' - 9y = 0.$
11. а) $y'' + y = \cos x;$
    б) $y'' - 5y' + 6y = 6x^3 - 3x^2 + 4x + 13;$
    в) $y'' - 5y' + 4y = 8e^{3x}.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 2y' + 2y = xe^{-x};\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.9

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $\sin(x+y)dx + \sin(x-y)dx + \frac{1}{\cos y}dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(x^2-1)y' = 2xy^2;\ y(\sqrt{2}) = 1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = e^{\frac{y}{x}}.$
4. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$
5. $y' + y = x\sqrt{y}.$
6. $(2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = x \cdot e^{-2x}, y(0) = \frac{1}{4}\ ;\ y'(0) = -\frac{1}{4}.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''(e^x + 1) + y' = 0.$
9. $y'' = (y')^2.$
10. а) $y'' - 3y' + 2y = 0;$
    б) $y'' + 2y' + 2y = 0;$
    в) $y'' - 25y = 0.$
11. а) $y'' + y' = 9x^2 + 4x - 6;$
    б) $y'' - 2y' - 3y = 12e^{3x};$
    в) $y'' - 6y' + 9y = -\cos x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6;\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.10

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $x^2y' = 1 + \cos 2y$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $2xyy' = 1 - x^2;\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$.
4. $y' - \frac{2y}{x} = x^3$.
5. $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$.
6. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \ln x,\ y(1) = 3\ ;\ y'(1) = -1$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $x^2y'' = (y')^2$.
9. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.
10. а) $y'' - 2y' + y = 0$;
    б) $y'' + 10y' + 21y = 0$;
    в) $y'' + 49y = 0$.
11. а) $y'' + 3y' - 4y = 6x \cdot e^{-x}$;
    б) $y'' - y' = 5x^2 - 12x + 8$;
    в) $y'' + 5y' + 4y = \sin 2x$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x;\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.11

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $dx-(3x+1)y^2dy=0; y\left(\sqrt[3]{\ln 4}\right)=1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx.$
4. $xy'+y-e^x=0.$
5. $y'+xy=x^3y^3.$
6. $(\sin x-y)dx+(\cos y-x)dy=0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''=\mathrm{arctg}x;\ \ y(0)=3\ ;\ y'(0)=-1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''=\frac{y'}{x}+x.$
9. $y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}.$
10. а) $y''-9y'+14y=0;$
    б) $y''+5y'=0;$
    в) $y''+2y'+5y=0.$
11. а) $y''+3y'+2y=(3x-7)e^{-x};$
    б) $y''+9y=9x^3+6x;$
    в) $y''-2y'+2y=-85\cos 3x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y''+4y'+4y=3e^{-2x}; y(0)=0\ ;\ y'(0)=0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=x-y \\ y'=-4x+y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.12

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $\cos\sqrt{x}dx - \sqrt{x}dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0; y(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $(x^3 + x^2y)dx - (y^3 + xy^2)dy = 0.$
4. $y' - \frac{1}{1-x^2} = 1 + x.$
5. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$
6. $(\cos x + 2xy)dx + (x^2 + \sin y)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'''\sin^4 x = \sin 2x\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ ;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ \ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''(x^2 + 1) = 2xy'.$
9. $yy'' - yy'\ln y = (y')^2.$
10. а) $2y'' + y' - y = 0;$
    б) $y'' + 12y' + 36y = 0;$
    в) $y'' + 25y = 0.$
11. а) $y'' - 3y' = 18x^2 - 2;$
    б) $2y'' - 7y' + 3y = (2x + 1)e^{3x};$
    в) $y'' - 6y' + 9y = 4\cos x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 2y' + 2y = 2x; y(0) = 2\ ;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.13

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(9+7\cos^3 x)dx-\cos^2 x\,dy=0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $e^{x-2y}dy=xdx;\ y(0)=-3.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $(x^2+y^2+xy)dx-x^2dy=0.$
4. $xy'-3y=3-4x-x^2.$
5. $xy'+y=y^2\ln x.$
6. $\frac{(x+3)dy-(y-2)dx}{(x+3)^2}=0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'''=x^{-2}\ y(1)=3\ ;\ y'(1)=1;\ \ y''(1)=-1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''=y'+x.$
9. $yy''-(y')^2=y^2y'.$
10. а) $y''-25y=0;$
    б) $y''+13y'+30y=0;$
    в) $y''-2y'+2y=0.$
11. а) $3y''-7y'+2y=3xe^{2x};$
    б) $y''+2y'=4x^3-2x;$
    в) $y''+y'-2y=11\cos\frac{x}{2}-7\sin\frac{x}{2}.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y''-2y'+y=16e^x;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=2.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=8x-9y \\ y'=7x-8y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.14

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $e^{1-2x}(y^2-1)dy - dx = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0;\ y(1) = -1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $xy^2dy = (x^3+y^3)dx.$
4. $y' - 2y = e^{2x}.$
5. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$
6. $(y - e^{-x})dx + (x+2y)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = 2\cos x \cdot \sin^2 x - \cos^3 x;\ y(0) = \frac{2}{3};\ y'(0) = 2.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}.$
9. $yy'' = y^2y' + (y')^2.$
10. а) $y'' - 9y' + 20y = 0;$
    б) $y'' + 10y' + 25y = 0;$
    в) $y'' + 81y = 0.$
11. а) $y'' - 3y' = 2x^2 - 5x;$
    б) $y'' + 3y' - 4y = x\sin x;$
    в) $3y'' + 10y' + 3y = 5e^{-3x}.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $2y'' + 5y' = 29\cos x;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x' = 12x - 11y \\ y' = 13x - 12y \end{cases}$$
    а) методом виключення змінної;
    б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.15

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $yx^2dy - \ln x dx = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2; y(1) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0.$
4. $xy' - 2y = 2x^4.$
5. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0.$
6. $(x + 2y + 1)dy - (2x - y + 1)dx.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \mathrm{tg}x \cdot \sec^2 x;\ \ y(0) = \frac{1}{2}\ ;\ y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $(y''x - y')y' = x^3.$
9. $yy'' = (y')^2.$
10. а) $y'' - 7y' + 12y = 0;$
    б) $4y'' - y' = 0;$
    в) $y'' - 6y' + 13y = 0.$
11. а) $y'' + 36y = 2\sin 6x;$
    б) $y'' - 6y' + 9y = e^{-x};$
    в) $5y'' - 6y' + y = x^2e^x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 3.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 7x - 5y \\ y' = 10x - 7y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.16

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{x(1-y^3)}{(1+x^2)y^2}$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $2xy' + y^2 = 1; y(1) = \frac{1}{2}$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.
4. $y' = \frac{y}{x} - 1$.
5. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.
6. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)dx + (x^2 + 4xy)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = \cos^2 x;\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = -\frac{1}{8};\ \ y''(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$.
9. $yy'' + (y')^2 = 1$.
10. а) $y'' - y' - 6y = 0$;
    б) $y'' - 9y = 0$;
    в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
11. а) $y'' - 8y' + 16y = 2xe^{4x}$;
    б) $y'' + 3y' + 2y = \cos x - 3\sin x$;
    в) $y'' + 9y' = x^2 + 4x - 3$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 2y' + y = e^{2x}; y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 3$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.17

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0.$

Розв’язати задачу Коші:

2. $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y}; \; y\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right).$
4. $(xy' - 1)\ln x = 2y.$
5. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$
6. $(6x - y)dx + (6y - x)dx = 0.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \cos x + e^{-x}; \;\; y(0) = -e^{-\pi}\,; \; y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $x^3y'' + x^2y' = 1.$
9. $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y.$
10. а) $9y'' - 6y' + y = 0;$
    б) $y'' + 12y' + 37y = 0;$
    в) $y'' - 2y' = 0.$
11. а) $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2;$
    б) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x};$
    в) $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}; \, y(0) = 1\,; \; y'(0) = 2.$
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.18

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $3e^{x}\sin y dx + (1 - e^{x})\cos y dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy;\ y(1) = \frac{1}{2}.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $x^2 y' = y(x + y).$
4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
5. $xy' + y = y^2 \ln x.$
6. $(y + \sin x)dx + (x - e^{-y})dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \frac{1}{x^2+1};\ \ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$
9. $y'' = y' + (y')^2.$
10. а) $y'' - y' - 2y = 0;$
    б) $y'' + 9y = 0;$
    в) $y'' - 6y' + 9y = 0.$
11. а) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x};$
    б) $4y'' - 4y' + y = -26\cos x;$
    в) $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + y' - 6y = xe^{2x};\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 5.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 11x - 10y \\ y' = 12x - 11y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.19

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(1-x^2)dy+xydx=0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $y'=9\cdot 5^{x-y};\ y(0)=0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $\frac{y-xy'}{x+yy'}=2.$
4. $y'-\frac{y}{x+1}=e^x(x+1).$
5. $y-y'=y^2+xy'.$
6. $(2y+\cos x)dx-(\sin y-2x)dy=0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $xy'''=2;\ y(1)=\frac{1}{2}\ ;\ y'(1)=0;\ \ y''(1)=0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''=2(y'-1)\mathrm{ctg}x.$
9. $y^4-y^3y''=1.$
10. а) $y''-8y'+15y=0;$
    б) $y''-7y'=0;$
    в) $y''+4y=0.$
11. а) $y''-4y'+13y=13x^3+x^2-2x-2;$
    б) $y''+2y'+y=6e^{-x};$
    в) $y''+5y'+4y=3\sin 2x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y''-4y'+4y=x^2;\ y(0)=1;\ y'(0)=2.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=9x-8y \\ y'=10x-9y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.20

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $(1 + e^x)yy' = e^y$; $y(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.
4. $y' + y = \cos x$.
5. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.
6. $(2y + xy^2 + 7)dx + (2x + x^2y - 15)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 3$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$; $y''(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$.
9. $y'' = e^{4y}$.
10. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$;
    б) $y'' - 12y' + 37y = 0$;
    в) $y'' - y = 0$.
11. а) $y'' - 3y' = 2x^3 - 4x$;
    б) $y'' + 49y = 3\sin 7x$;
    в) $y'' - y' - 6y = 2xe^x$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{3x}$; $y(0) = -2$; $y'(0) = 3$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$$
    а) методом виключення змінної;
    б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.21

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$.

Розв’язати задачу Коші:

2. $y' = \frac{1+x^2}{1+y^2}$; $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
5. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
6. $\frac{(y+3)dx-(x-1)dy}{(y+3)^2} = 0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \sin^3 x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $xy'' = y'$.
9. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.
10. а) $y''+y' - 2y = 0$;
    б) $y'' + 10y' = 0$;
    в) $y''+2y' + 2y = 0$.
11. а) $y'' - 2y' - 15y = 4xe^{3x}$;
    б) $y'' + y = 14\cos x + 6\sin x$;
    в) $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + y' = 2e^x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$.
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 10x - 9y \\ y' = 11x - 10y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.22

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

Розв’язати задачу Коші:

2. $y' = \frac{y+1}{x}$; $y(1) = 0$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $\frac{xy'-y}{x} = \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.
4. $y' = e^{2x} - e^{x}y$.
5. $xy^2y' = x^2 + y^3$.
6. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + 5\right)dx - \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2\right)dy = 0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = \cos\frac{x}{2}\,y(0) = -3$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $yy'' + (y')^2 = x$.
9. $1 + (y')^2 = 2yy''$.
10. а) $y'' - 100y = 0$;
    б) $y'' - 15y' + 56y = 0$;
    в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
11. а) $2y'' + y' - y = x\sin x$;
    б) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$;
    в) $y'' + 36y = 4xe^{-x}$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.23

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $xyy' = 1 - x^2;\ y(1) = 2.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x}.$
4. $y' = \frac{y}{x} - 1.$
5. $y' = \frac{x}{y} \cdot e^{2x} + y.$
6. $xdy + (x + y)dx = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y''' = \frac{1}{x} y(1) = -3\ ;\ y'(1) = 1;\ \ y''(1) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}.$
9. $yy'' = (y')^2.$
10. а) $y'' - y' - 6y = 0;$
    б) $y'' + 9y' = 0;$
    в) $y'' - 4y' + 4y = 0.$
11. а) $y'' + 49y = x^3 + 4x;$
    б) $y'' + 3y' - 4y = 3xe^{-4x};$
    в) $y'' + 9y = 18\cos 3x - 12\sin 3x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - y' = 2(1 - x);\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 1.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.24

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

Розв’язати задачу Коші:

2. $5^{x^2-y}dy - xdx = 0; y(0) = 0.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $y^2 + x^2y' = xyy'.$
4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
5. $y' + 2y = y^2e^x.$
6. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \sin^2 2x;\ y(0) = -1\ ;\ y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $2xy'y'' = (y')^2 + 1.$
9. $y''\text{tg}y - 2(y')^2 = 0.$
10. а) $y'' - 10y' + 21y = 0;$
    б) $y'' - 16y = 0;$
    в) $y'' + 6y' + 13y = 0.$
11. а) $y'' + y' - 2y = (2x-1)e^{-x};$
    б) $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27;$
    в) $y'' - 8y' + 16y = \cos 4x + 2\sin 4x.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 2y' + y = e^{-x}; y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 2.$
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.25

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0;\ y(1) = 1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $x^3 y' = y(y^2 + x^2).$
4. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$
5. $y' - y + y^2 \cos x = 0.$
6. $(y - y^3)dx + (x + 3xy^2)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \frac{1}{\cos^2 2x};\ y(0) = -2;\ y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y'' x \ln x - y' = 0.$
9. $y'' = y'(1 + (y')^2).$
10. а) $y'' - y' - 90y = 0;$
    б) $y'' - 4y = 0;$
    в) $y''+2y' + 2y = 0.$
11. а) $y'' + y = 14\cos x + 6\sin x;$
    б) $y'' + y' - 2y = 3x\cos 2x;$
    в) $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14;$
    $y(0) = 0;\ y'(0) = 7.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.26

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $(x^2+2x+1)dx-(x^2-1)dy=0$.

Розв’язати задачу Коші:

2. $y'=y\text{ctg}x;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)dx+\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)dy=0$.
4. $y'\cos x+y\sin x=1$.
5. $y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2-1}$.
6. $(2y+xy^2)dx+(x^2y+2x-8)dy=0$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'''=\frac{6}{x^3};\ \ y(1)=\ 0;\ y'(1)=5;\ y''(1)=1$.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $xy''+y'=\ln x$.
9. $2yy''=(y')^2+1$.
10. а) $y''-8y'+12y=0$;
    б) $y''-36y=0$;
    в) $y''+2y'+5y=0$.
11. а) $y''-6y'+9y=(x-2)e^{3x}$;
    б) $y''-4y'=3\cos 4x$;
    в) $y''+36y=36+66x-36x^3$.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y''+4y'-12y=8\sin 2x;\ y(0)=0\ ;\ y'(0)=0$.
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}x'=3x+4y\\ y'=4x-3y\end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.27

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $xdy - \left(1 - \sqrt{x}\right)^3 dx = 0.$

Розв’язати задачу Коші:

2. $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0;\ y(0) = 0.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

3. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0.$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$
5. $y'x + y = -xy^2.$
6. $(y + 5\cos x)dx + (x - e^{3y})dy = 0.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = x + \sin x;\ \ y(0) = \ -3;\ y'(0) = 0.$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

8. $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right).$
9. $y'' = \frac{1}{y^3}.$
10. а) $y'' + y' - 2y = 0;$
    б) $y''+7y' = 0;$
    в) $y'' - 2y' + 2y = 0.$
11. а) $y'' - 16y = -3e^{4x};$
    б) $5y'' - 6y' + y = \cos x - \sin x;$
    в) $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74.$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.28

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $(xy^2 + y^2)dx - xdy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $(1 + e^x)yy' = e^x;\ y(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $ydx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$
4. $y'\ln x - \frac{y}{x} = 1 - \ln x.$
5. $xy' + y = -xy^2.$
6. $(3x^2 + 6y)dx + (6x - e^{8y} + 4)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = 2\sin^2 x\cos x;\ \ y(0) = \frac{1}{9}\ ;\ y'(0) = 1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y''x\ln x = y'.$
9. $y'' + 2y(y')^3 = 0.$
10. а) $y'' + 12y' + 35y = 0;$
    б) $y'' + 4y = 0;$
    в) $y'' - 6y' + 13y = 0.$
11. а) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 4;$
    б) $y'' + 3y' - 4y = x^2\sin 2x;$
    в) $y'' - 4y = 8e^{2x}.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + y = \cos x;\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 2.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$$
    а) методом виключення змінної;
    б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.29

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y'\text{tg}x - y = 5$.

Розв'язати задачу Коші:

2. $\sin y\cos x dy = \cos y \sin x dx$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
4. $xy' + y - e^x = 0$.
5. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 2}$.
6. $(5x^4 + xy^2 - 8)dx + (x^2y - \sin y)dy = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \text{arctg}x; y(0) = 1\,;\; y'(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y'' + y' = \sin x$.
9. $yy'' - 2(y')^2 = 0$.
10. а) $y'' - 6y' - 16y = 0$;
    б) $y'' - 12y' = 0$;
    в) $y'' + 81y = 0$.
11. а) $2y'' + y' - y = (x^2 - 5)e^{-x}$;
    б) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$;
    в) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 4y' = e^{-2x}; y(0) = 0\,;\; y'(0) = 0$.
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

Завдання 14.30

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$

Розв'язати задачу Коші:

2. $y'\sin x = y\ln y;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy.$
4. $xy' + y - e^x = 0.$
5. $y' = -x\sqrt[3]{y} + 3y.$
6. $(7x + 5x^4 - 3y)dx - (3x + 6y - 3y^2)dy = 0.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

7. $y'' = \frac{1}{\sin^2 x};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\ ;\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

8. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1).$
9. $yy'' - (y')^2 = 0.$
10. а) $y'' - 7y' + 12y = 0;$
    б) $y'' + 6y' + 9y = 0;$
    в) $y'' + 25y = 0.$
11. а) $5y'' + 9y' - 2y = x^3 - 2x;$
    б) $y'' - 4y' + 5y = -2xe^x;$
    в) $y'' - 16y = \cos x - 4\sin x.$

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

12. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66;$
    $y(0) = 3;\ y'(0) = 0.$
13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$$

а) методом виключення змінної;

б) за допомогою характеристичного рівняння.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 452 с.
4. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.
5. Станішевський С.О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.
6. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.
7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.
8. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 255 с.
9. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – 224 с.
10. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 250 с.
11. Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. Ч.2 / А. А. Гусак. – Минск : Выш. шк., 1988. – 229 с.
12. Тевяшев А. Д. Высшая математика. Общий курс. Сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Харьков : ХТУРЭ, 1997. – 192 с.

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Модуль 2

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
Редактор *В. І. Шалда*
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*
Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко* `

Підп. до друку 18.05.2017 Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 14,0
Зам. № Тираж 300 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.